2. 無限自由度の量子系の基底状態と平衡状態

松井卓

九州大学数理学研究院

July 28 2015

作用素ノルム

$\mathfrak{H}$: ヒルベルト空間，(ξ, η)：内積 ，$\|\xi\| = ((\xi, \xi))^{1/2}$

作用素ノルム

$\mathfrak{H}$: ヒルベルト空間，(ξ, η)：内積，$\|\xi\| = ((\xi, \xi))^{1/2}$

$\mathfrak{H}$ 上の線形作用素 Q のノルム $\|Q\|$:

$$\begin{aligned} \|Q\| &= \sup\{\|Q\xi\| \mid \xi \in \mathfrak{H}, \|\xi\| = 1\}, \\ &= \sup_{\xi \neq 0} \frac{\|Q\xi\|}{\|\xi\|} \end{aligned}$$

作用素ノルム

$\mathfrak{H}$: ヒルベルト空間，(ξ, η) : 内積 ，$\|\xi\| = ((\xi, \xi))^{1/2}$

$\mathfrak{H}$ 上の線形作用素 Q のノルム $\|Q\|$:

$$\begin{aligned} \|Q\| &= \sup \{\|Q\xi\| \mid \xi \in \mathfrak{H}, \|\xi\| = 1\}, \\ &= \sup_{\xi \neq 0} \frac{\|Q\xi\|}{\|\xi\|} \end{aligned}$$

次が成立 (c は定数)

作用素ノルム

$\mathfrak{H}$: ヒルベルト空間，(ξ, η) : 内積 ，$\|\xi\| = ((\xi, \xi))^{1/2}$

$\mathfrak{H}$ 上の線形作用素 Q のノルム $\|Q\|$:

$$\begin{aligned} \|Q\| &= \sup\{\|Q\xi\| \mid \xi \in \mathfrak{H}, \|\xi\| = 1\}, \\ &= \sup_{\xi \neq 0} \frac{\|Q\xi\|}{\|\xi\|} \end{aligned}$$

次が成立 (c は定数)

$$\|Q + R\| \leq \|Q\| + \|R\|,$$

$$\|QR\| \leq \|Q\| \cdot \|R\|, \quad \|cQ\| = |c|\|Q\|$$

$$\| Q^* Q \| = \|Q\|^2$$

(i) $dim\mathfrak{H} < \infty$，$Q = Q^*$: エルミート行列であれば，

$$\|Q\| = \max\{|\lambda| \quad \lambda : Q \text{ の固有値}\}$$

(i) $dim\mathfrak{H} < \infty$，$Q = Q^*$: エルミート行列であれば，

$$\|Q\| = \max\{|\lambda| \ \ \lambda: Q \text{ の固有値}\}$$

(ii) $dim\mathfrak{H} < \infty$，$Q \neq Q^*$ であれば，

$$\|Q\| = \|Q^* Q\|^{1/2}$$

(i) $dim\mathfrak{H} < \infty$, $Q = Q^*$: エルミート行列であれば，

$$\|Q\| = \max\{|\lambda| \quad \lambda: Q \text{ の固有値}\}$$

(ii) $dim\mathfrak{H} < \infty$, $Q \neq Q^*$ であれば，

$$\|Q\| = \|Q^*Q\|^{1/2}$$

(iii) $dim\mathfrak{H} = \infty$, $Q = Q^*$ であれば，
$\|Q\| = \sup\{|\lambda| \quad \lambda: Q \text{ のスペクトル}\}$

$\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ = { $\mathfrak{H}$ の有界線形作用素 (i.e. $||Q|| < \infty$ となる作用素)}

$\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ = { $\mathfrak{H}$ の有界線形作用素 (i.e. $\|Q\| < \infty$ となる作用素)}

作用素の（ノルム）収束

$$\lim_k Q_k = Q \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_k \|Q_k - Q\| = 0$$

$\mathfrak{B}(\mathfrak{H}) = \{ \mathfrak{H}$ の有界線形作用素 (i.e. $\|Q\| < \infty$ となる作用素)$\}$

作用素の（ノルム）収束

$$\lim_k Q_k = Q \iff \lim_k \|Q_k - Q\| = 0$$

$\mathfrak{A}$ は C^*- 代数 $\iff$

$\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ = { $\mathfrak{H}$ の有界線形作用素 (i.e. $\|Q\| < \infty$ となる作用素)}

作用素の（ノルム）収束

$$\lim_k Q_k = Q \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_k \|Q_k - Q\| = 0$$

$\mathfrak{A}$ は C^*- 代数 $\Longleftrightarrow$

(i) $\mathfrak{A}(\subset \mathfrak{B}(\mathfrak{H}))$：部分代数

$\mathfrak{B}(\mathfrak{H}) = \{$ $\mathfrak{H}$ の有界線形作用素 (i.e. $\|Q\| < \infty$ となる作用素)$\}$

作用素の（ノルム）収束

$$\lim_k Q_k = Q \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_k \|Q_k - Q\| = 0$$

$\mathfrak{A}$ は C^*- 代数 $\Longleftrightarrow$

(i) $\mathfrak{A}(\subset \mathfrak{B}(\mathfrak{H}))$：部分代数

(ii) $Q \in \mathfrak{A} \Rightarrow Q^* \in \mathfrak{A}$

$\mathfrak{B}(\mathfrak{H}) = \{ \mathfrak{H}$ の有界線形作用素 (i.e. $\|Q\| < \infty$ となる作用素)$\}$

作用素の（ノルム）収束

$$\lim_k Q_k = Q \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_k \|Q_k - Q\| = 0$$

$\mathfrak{A}$ は C^*− 代数 $\Longleftrightarrow$

(i) $\mathfrak{A}(\subset \mathfrak{B}(\mathfrak{H}))$：部分代数

(ii) $Q \in \mathfrak{A} \Rightarrow Q^* \in \mathfrak{A}$

(iii) $Q_k \in \mathfrak{A}$, $Q \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ に対して
$\lim_k Q_k = Q \Rightarrow Q \in \mathfrak{A}$

量子スピン系の局所物理量が定める C^*- 代数

Z^{d} :整数格子　格子点 $k = (k_1, k_2, \cdots, k_d)(\in \mathrm{Z}^{\mathrm{d}})$

量子スピン系の局所物理量が定める C^*- 代数

$\mathrm{Z^d}$:整数格子　格子点 $k = (k_1, k_2, \cdots, k_d)(\in \mathrm{Z^d})$

$$\mathcal{A}_{\mathrm{loc}} = \otimes_{\mathrm{Z^d}} M_n(\mathrm{C}),$$

ここで，$M_n(\mathrm{C})$ は $n \times n$ の行列全体

量子スピン系の局所物理量が定める C^*- 代数

Z^{d} :整数格子　格子点 $k = (k_1, k_2, \cdots, k_d)(\in \mathrm{Z}^{\mathrm{d}})$

$$\mathcal{A}_{\mathrm{loc}} = \otimes_{\mathrm{Z}^{\mathrm{d}}} M_n(\mathrm{C}),$$

ここで，$M_n(\mathrm{C})$ は $n \times n$ の行列全体

$$Q^{(k)} = \cdots \otimes 1 \otimes 1 \otimes Q \otimes 1 \otimes \cdots ,$$

(Q の入っているテンソル積の成分は格子点 k に対応する．)

量子スピン系の局所物理量が定める C^*- 代数

Z^{d} :整数格子　格子点 $k = (k_1, k_2, \cdots, k_d)(\in \mathrm{Z}^{\mathrm{d}})$

$$\mathcal{A}_{\mathrm{loc}} = \otimes_{\mathrm{Z}^{\mathrm{d}}} M_n(\mathrm{C}),$$

ここで，$M_n(\mathrm{C})$ は $n \times n$ の行列全体

$$Q^{(k)} = \cdots \otimes 1 \otimes 1 \otimes Q \otimes 1 \otimes \cdots,$$

(Q の入っているテンソル積の成分は格子点 k に対応する．)

$\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$ の元は $Q^{(k)}$ の形の元の積と和で表されるもの全体．

量子スピン系の局所物理量が定める C^*- 代数

Z^{d} :整数格子　格子点 $k = (k_1, k_2, \cdots, k_d)(\in \mathrm{Z}^{\mathrm{d}})$

$$\mathcal{A}_{\mathrm{loc}} = \otimes_{\mathrm{Z}^{\mathrm{d}}} M_n(\mathrm{C}),$$

ここで，$M_n(\mathrm{C})$ は $n \times n$ の行列全体

$$Q^{(k)} = \cdots \otimes 1 \otimes 1 \otimes Q \otimes 1 \otimes \cdots,$$

(Q の入っているテンソル積の成分は格子点 k に対応する．)

$\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$ の元は $Q^{(k)}$ の形の元の積と和で表されるもの全体．
局所物理量 $\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$ の元．

$\|Q\|$: 行列のノルム $\Rightarrow$ $\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$ のノルム

$\|Q\|$: 行列のノルム $\Rightarrow$ $\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$ のノルム

$\mathcal{A}$: C^*- 代数， $\mathcal{A}_{\mathrm{loc}} \subset \mathcal{A}$

$||Q||$: 行列のノルム ⇒ $\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$ のノルム

$\mathcal{A}$: C^*- 代数， $\mathcal{A}_{\mathrm{loc}} \subset \mathcal{A}$

$\mathcal{A}$ の元 Q は局所物理量で近似可能

$\|Q\|$: 行列のノルム $\Rightarrow \mathcal{A}_{\rm loc}$ のノルム

$\mathcal{A}$: C^*- 代数， $\mathcal{A}_{\rm loc} \subset \mathcal{A}$

$\mathcal{A}$ の元 Q は局所物理量で近似可能

$$Q = \lim_k Q_k, \qquad Q_k \in \mathcal{A}_{\rm loc}$$

$\|Q\|$: 行列のノルム ⇒ $\mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$ のノルム

$\mathcal{A}$: C^*- 代数， $\mathcal{A}_{\mathrm{loc}} \subset \mathcal{A}$

$\mathcal{A}$ の元 Q は局所物理量で近似可能

$$Q = \lim_k Q_k, \qquad Q_k \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$$

$\mathcal{A}$ を準局所代数（quasi-local algebra）と呼ぶ．

$\Lambda \subset \mathrm{Z}^{\mathrm{d}}$ に対し
$\mathcal{A}_{\Lambda}$: Λ の中に局在する局所物理量全体.

$$\mathcal{A}_{\mathrm{loc}} = \cup_{|\Lambda|<\infty} \mathcal{A}_{\Lambda}$$

$\Lambda \subset \mathbf{Z}^{\mathrm{d}}$ に対し
$\mathcal{A}_\Lambda$: Λ の中に局在する局所物理量全体．

$$\mathcal{A}_{\mathrm{loc}} = \cup_{|\Lambda|<\infty} \mathcal{A}_\Lambda$$

局所性
$\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$ とする．$[\, Q\, ,\, R\,] = 0, (\, Q \in \mathcal{A}_{\Lambda_1},\, R \in \mathcal{A}_{\Lambda_2}\,)$

量子状態

量子状態あるいは，単に状態と言えばヒルベルト空間のベクトルではなく期待値を与える汎関数とする．つまり，

量子状態

量子状態あるいは，単に状態と言えばヒルベルト空間のベクトルではなく期待値を与える汎関数とする．つまり，

Definition

量子状態

量子状態あるいは，単に状態と言えばヒルベルト空間のベクトルではなく期待値を与える汎関数とする．つまり，

Definition

(i) $\varphi : \mathcal{A}$ **の状態** $\iff$

量子状態

量子状態あるいは，単に状態と言えばヒルベルト空間のベクトルではなく期待値を与える汎関数とする．つまり，

Definition

(i) $\varphi : \mathscr{A}$ **の状態** $\iff$ φ **は** $\mathscr{A}$ **から複素数への写像で**

量子状態

量子状態あるいは，単に状態と言えばヒルベルト空間のベクトルではなく期待値を与える汎関数とする．つまり，

Definition

(i) $\varphi : \mathscr{A}$ **の状態** $\iff$ φ **は** $\mathscr{A}$ **から複素数への写像で**

(ia) **線形性**

$$\varphi(Q + R) = \varphi(Q) + \varphi(R), \quad \varphi(cQ) = c\varphi(Q),$$

量子状態

量子状態あるいは，単に状態と言えばヒルベルト空間のベクトルではなく期待値を与える汎関数とする．つまり，

Definition
(i) $\varphi : \mathcal{A}$ **の状態** $\iff$ φ **は** $\mathcal{A}$ **から複素数への写像で**

(ia) **線形性**

$$\varphi(Q + R) = \varphi(Q) + \varphi(R), \quad \varphi(cQ) = c\varphi(Q),$$

(ib) **正値性と規格化条件**

$$\varphi(1) = 1, \quad \varphi(Q^* Q) \geq 0, \quad Q, R \in \mathcal{A}, \quad c \in \mathbb{C}.$$

をみたす．

(Definition 続き)

(Definition 続き)
(ii) $\mathcal{A}$ の状態 φ が純粋状態であるとは,

(Definition 続き)
(ii) $\mathcal{A}$ の状態 φ が純粋状態であるとは,
φ は二つの相異なる状態の凸和では表せないこと.

すなわち,

(Definition 続き）
(ii) $\mathcal{A}$ の状態 φ が純粋状態であるとは,
φ は二つの相異なる状態の凸和では表せないこと.

すなわち,

$$\varphi = \lambda\psi_1 + (1-\lambda)\psi_2,$$

($0 < \lambda < 1$,　ψ_1, ψ_2 ：状態)

(Definition 続き)
(ii) $\mathcal{A}$ の状態 φ が純粋状態であるとは,
φ は二つの相異なる状態の凸和では表せないこと.

すなわち,

$$\varphi = \lambda\psi_1 + (1-\lambda)\psi_2,$$

($0 < \lambda < 1$, ψ_1, ψ_2 : 状態)

$$\Rightarrow \varphi = \psi_1 = \psi_2$$

有限量子系では $\varphi(Q) = tr(\rho Q)$ （ρ： 密度行列）

有限量子系では $\varphi(Q) = tr(\rho Q)$ （ρ： 密度行列）

無限次元の系では，トレースがあっても状態に対応する密度行列が定まらないこともある．

有限量子系では $\varphi(Q) = tr(\rho Q)$ （ρ： 密度行列）

無限次元の系では，トレースがあっても状態に対応する密度行列が定まらないこともある．

与えられた状態からヒルベルト空間と状態を表すベクトルを復元する方法がある．(GNS 構成法）

表現

Definition

表現

Definition

$\{\pi(\cdot), \mathcal{H}\}$ が $\mathcal{A}$ の表現 $\Longleftrightarrow$

表現

Definition

$\{\pi(\cdot), \mathcal{H}\}$ が $\mathcal{A}$ の表現 $\iff$

$\mathcal{H}$: ヒルベルト空間，$\pi(\cdot)$:$\mathcal{A} \Rightarrow \mathfrak{B}(\mathcal{H})$

$$\pi(Q+R) = \pi(Q) + \pi(R), \quad \pi(cQ) = c\pi(Q),$$

表現

Definition

$\{\pi(\cdot), \mathcal{H}\}$ が $\mathcal{A}$ の表現 $\Longleftrightarrow$

$\mathcal{H}$: ヒルベルト空間，$\pi(\cdot)$:$\mathcal{A} \Rightarrow \mathfrak{B}(\mathcal{H})$

$$\pi(Q+R) = \pi(Q) + \pi(R), \quad \pi(cQ) = c\pi(Q),$$
$$\pi(QR) = \pi(Q)\pi(R)$$
$$\pi(Q^*) = \pi(Q)^*,$$
$$Q, R \in \mathcal{A}, \quad c \in \mathbf{C}.$$

GNS 表現

φ: $\mathcal{A}$ の状態 $\Rightarrow$

GNS 表現

φ: $\mathcal{A}$ の状態 $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ の表現 $\{\pi_\varphi(\cdot), \mathcal{H}_\varphi\}$，$\Omega_\varphi \in \mathcal{H}_\varphi$

GNS 表現

φ: $\mathcal{A}$ の状態 $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ の表現 $\{\pi_\varphi(\cdot), \mathcal{H}_\varphi\}$， $\Omega_\varphi \in \mathcal{H}_\varphi$

(i) Ω_φ についての期待値$= \varphi$

GNS 表現

φ: $\mathcal{A}$ の状態 $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ の表現 $\{\pi_\varphi(\cdot), \mathcal{H}_\varphi\}$， $\Omega_\varphi \in \mathcal{H}_\varphi$

(i) Ω_φ についての期待値$= \varphi$

$$\left(\Omega_\varphi, \pi_\varphi(Q)\Omega_\varphi\right) = \varphi(Q), \quad Q \in \mathcal{A}.$$

GNS 表現

φ: $\mathcal{A}$ の状態 $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ の表現 $\{\pi_\varphi(\cdot), \mathcal{H}_\varphi\}$，$\Omega_\varphi \in \mathcal{H}_\varphi$

(i) Ω_φ についての期待値$= \varphi$

$$\left(\Omega_\varphi, \pi_\varphi(Q)\Omega_\varphi\right) = \varphi(Q), \quad Q \in \mathcal{A}.$$

(ii) $\pi_\varphi(Q)\Omega_\varphi$ $(Q \in \mathcal{A})$ の形のベクトルは $\mathcal{H}_\varphi$ の中で全体，

$$\xi \perp \pi_\varphi(Q)\Omega_\varphi, \quad ({}^\forall Q \in \mathcal{A}) \quad \Rightarrow \quad \xi = 0.$$

GNS 表現

φ: $\mathcal{A}$ の状態 $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ の表現 $\{\pi_\varphi(\cdot), \mathcal{H}_\varphi\}$，$\Omega_\varphi \in \mathcal{H}_\varphi$

(i) Ω_φ についての期待値$= \varphi$

$$\left(\Omega_\varphi, \pi_\varphi(Q)\Omega_\varphi\right) = \varphi(Q), \quad Q \in \mathcal{A}.$$

(ii) $\pi_\varphi(Q)\Omega_\varphi$ ($Q \in \mathcal{A}$) の形のベクトルは $\mathcal{H}_\varphi$ の中で全体，

$$\xi \perp \pi_\varphi(Q)\Omega_\varphi, \quad ({}^\forall Q \in \mathcal{A}) \quad \Rightarrow \quad \xi = 0.$$

GNS 構成法 (Gelfand-Naimark-Segal)

GNS 構成法の例

(i) フェルミオン・フォック空間

GNS 構成法の例

(i) フェルミオン・フォック空間

$$\{c_k, c_l^*\} = \delta_{kl}1, \quad \{c_k, c_l\} = 0, \{c_k^*, c_l^*\} = 0$$

GNS 構成法の例

(i) フェルミオン・フォック空間

$$\{c_k, c_l^*\} = \delta_{kl}1, \quad \{c_k, c_l\} = 0, \{c_k^*, c_l^*\} = 0$$

GNS 構成法の例

(i) **フェルミオン・フォック空間**

$$\{c_k, c_l^*\} = \delta_{kl}\mathbf{1}, \quad \{c_k, c_l\} = 0, \{c_k^*, c_l^*\} = 0$$

(ii) 2-qubit **の** maximally entangled state

GNS 構成法の例

(i) **フェルミオン・フォック空間**

$$\{c_k, c_l^*\} = \delta_{kl}1, \quad \{c_k, c_l\} = 0, \{c_k^*, c_l^*\} = 0$$

(ii) 2-qubit **の** maximally entangled state

ψ **:** $\mathcal{A} \otimes M_2(\mathrm{C}) \otimes \mathrm{M}_2(\mathrm{C})$ **の純粋状態**

GNS 構成法の例

(i) フェルミオン・フォック空間

$$\{c_k, c_l^*\} = \delta_{kl}1, \quad \{c_k, c_l\} = 0, \{c_k^*, c_l^*\} = 0$$

(ii) 2-qubit の maximally entangled state

ψ ：$\mathcal{A} \otimes M_2(\mathrm{C}) \otimes \mathrm{M}_2(\mathrm{C})$ の純粋状態

$$\psi(Q \otimes 1) = tr(Q), \quad \psi(1 \otimes R) = tr(R)$$

ハイゼンベルク時間発展

ハイゼンベルク時間発展

（形式的）ハミルトアニアン

$$H = \sum_k h_k$$

ハイゼンベルク時間発展

（形式的）ハミルトアニアン

$$H = \sum_k h_k$$

例：$h_k = \sum_{l:|k-l|=1} \left\{ \sigma_x^{(k)} \sigma_x^{(l)} + \sigma_y^{(k)} \sigma_y^{(l)} + \sigma_z^{(k)} \sigma_z^{(l)} \right\}$

ハイゼンベルク時間発展

（形式的）ハミルトアニアン

$$H = \sum_k h_k$$

例：$h_k = \sum_{l:|k-l|=1} \left\{ \sigma_x^{(k)}\sigma_x^{(l)} + \sigma_y^{(k)}\sigma_y^{(l)} + \sigma_z^{(k)}\sigma_z^{(l)} \right\}$

$Q \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$ **の時間発展**： $\alpha_t(Q) = e^{itH} Q e^{itH}$

ハイゼンベルク時間発展

（形式的）ハミルトアニアン

$$H = \sum_k h_k$$

例：$h_k = \sum_{l:|k-l|=1} \left\{ \sigma_x^{(k)}\sigma_x^{(l)} + \sigma_y^{(k)}\sigma_y^{(l)} + \sigma_z^{(k)}\sigma_z^{(l)} \right\}$

$Q \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$ **の時間発展**：$\alpha_t(Q) = e^{itH} Q e^{itH}$

α_t **の生成作用素（無限小時間発展）**：$\delta(Q) = [H, Q]$

ハイゼンベルク時間発展

（形式的）ハミルトアニアン

$$H = \sum_k h_k$$

例：$h_k = \sum_{l:|k-l|=1} \left\{ \sigma_x^{(k)}\sigma_x^{(l)} + \sigma_y^{(k)}\sigma_y^{(l)} + \sigma_z^{(k)}\sigma_z^{(l)} \right\}$

$Q \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$ の時間発展： $\alpha_t(Q) = e^{itH} Q e^{itH}$

α_t の生成作用素（無限小時間発展）：$\delta(Q) = [H, Q]$

α_t と δ により平衡状態と基底状態を表したい．

基底状態

φ が基底状態：

$$\varphi(Q^* \delta(Q)) \geq 0$$

が十分多くの Q で成立

基底状態

φ が基底状態：

$$\varphi(Q^* \delta(Q)) \geq 0$$

が十分多くの Q で成立

有限量子系の場合，（ E : H の基底状態エネルギー ）

基底状態

φ が基底状態：

$$\varphi(Q^* \delta(Q)) \geq 0$$

が十分多くの Q で成立

有限量子系の場合，（ E : H の基底状態エネルギー ）

$$\begin{aligned} &\varphi(Q^* \delta(Q)) \\ = \quad &(Q\Omega, [H, Q]\Omega) \end{aligned}$$

基底状態

φ が基底状態：

$$\varphi(Q^* \delta(Q)) \geq 0$$

が十分多くの Q で成立

有限量子系の場合，（　E : H の基底状態エネルギー　）

$$\begin{aligned} & \varphi(\, Q^* \, \delta(Q) \,) \\ = \; & (Q\Omega, [H, Q]\Omega) \\ = \; & (Q\Omega, [\,(H - E1)\,, Q]\Omega) \end{aligned}$$

基底状態

φ が基底状態：

$$\varphi(Q^*\delta(Q)) \geq 0$$

が十分多くの Q で成立

有限量子系の場合，（ E : H の基底状態エネルギー ）

$$\begin{aligned} & \varphi(\, Q^* \, \delta(Q) \,) \\ = \; & (Q\Omega, [H, Q]\Omega) \\ = \; & (Q\Omega, [\,(H - E1)\,, Q]\Omega) \\ = \; & (Q\Omega, (H - E1)\, Q\Omega) - (Q\Omega, Q\,(H - E1)\,\Omega) \end{aligned}$$

基底状態

φ が基底状態：

$$\varphi(Q^*\delta(Q)) \geq 0$$

が十分多くの Q で成立

有限量子系の場合，（ E : H の基底状態エネルギー ）

$$\begin{aligned}
& \varphi(\, Q^*\, \delta(Q)\,) \\
=\ & (Q\Omega, [H, Q]\Omega) \\
=\ & (Q\Omega, [\,(H - E1)\,, Q]\Omega) \\
=\ & (Q\Omega, (H - E1)\, Q\Omega) - (Q\Omega, Q\,(H - E1)\,\Omega) \\
=\ & (Q\Omega, (H - E1)\, Q\Omega) \geq 0
\end{aligned}$$

(i) **有限量子系では φ が純粋状態である時，最低エネルギーの固有ベクトル状態と一致**

(i) 有限量子系では φ が純粋状態である時，最低エネルギーの固有ベクトル状態と一致

(ii) （無限）量子イジング模型の基底状態
$\omega = \frac{1}{2}(\omega^{+} + \omega^{-})$

(i) 有限量子系では φ が純粋状態である時，最低エネルギーの固有ベクトル状態と一致

(ii) （無限）量子イジング模型の基底状態
$\omega = \frac{1}{2}(\omega^{+} + \omega^{-})$
$\omega^{\pm}$ もこの不等式をみたす．

(i) 有限量子系では φ が純粋状態である時，最低エネルギーの固有ベクトル状態と一致

(ii) （無限）量子イジング模型の基底状態
$\omega = \frac{1}{2}(\omega^{+} + \omega^{-})$
$\omega^{\pm}$ もこの不等式をみたす．

(iii) frustration free ground state $\Rightarrow$ 不等式をみたす

(i) **有限量子系では φ が純粋状態である時，最低エネルギーの固有ベクトル状態と一致**

(ii) **（無限）量子イジング模型の基底状態**
$\omega = \frac{1}{2}(\omega^{+} + \omega^{-})$
$\omega^{\pm}$ **もこの不等式をみたす．**

(iii) frustration free ground state $\Rightarrow$ **不等式をみたす**

(iv) **逆は不成立（並進不変でない基底状態は** frustration free **ではない** domain wall)

基底状態と GNS 表現

φ : H の基底状態

基底状態と GNS 表現

φ : H の基底状態 $\{\pi(\cdot), \Omega, \mathfrak{H}\}$: φ の GNS 表現

基底状態と GNS 表現

φ : H の基底状態 $\{\pi(\cdot), \Omega, \mathfrak{H}\}$: φ の GNS 表現

以下の性質を持つ H_φ が存在

基底状態と GNS 表現

φ : H の基底状態 $\{\pi(\cdot), \Omega, \mathfrak{H}\}$: φ の GNS 表現

以下の性質を持つ H_φ が存在

(i) H_φ のスペクトルは正，$H_\varphi \geq 0$

基底状態と GNS 表現

$\varphi : H$ の基底状態 $\{\pi(\cdot), \Omega, \mathfrak{H}\}$：$\varphi$ の GNS 表現

以下の性質を持つ H_φ が存在

(i) H_φ のスペクトルは正，$H_\varphi \geq 0$

(ii) $H_\varphi \Omega = 0$

基底状態と GNS 表現

φ : H の基底状態 $\{\pi(\cdot), \Omega, \mathfrak{H}\}$: φ の GNS 表現

以下の性質を持つ H_φ が存在

(i) H_φ のスペクトルは正，$H_\varphi \geq 0$

(ii) $H_\varphi \Omega = 0$

(iii) $e^{itH_\varphi} \pi(Q) e^{-itH_\varphi} = \pi(\alpha_t(Q))$

基底状態と GNS 表現

φ : H の基底状態 $\{\pi(\cdot), \Omega, \mathfrak{H}\}$: φ の GNS 表現

以下の性質を持つ H_φ が存在

(i) H_φ のスペクトルは正，$H_\varphi \geq 0$

(ii) $H_\varphi \Omega = 0$

(iii) $e^{itH_\varphi}\pi(Q)e^{-itH_\varphi} = \pi(\alpha_t(Q))$

H_φ : 繰り込まれたハミルトニアン

平衡状態

平衡状態

$$\psi_\beta(Q) = \frac{tr(e^{-\beta H}Q)}{tr(e^{-\beta H})}$$

平衡状態

$$\psi_\beta(Q) = \frac{tr(e^{-\beta H}Q)}{tr(e^{-\beta H})}$$

$$\alpha_t(Q) = e^{itH}Qe^{-itH},$$

平衡状態

$$\psi_\beta(Q) = \frac{tr(e^{-\beta H}Q)}{tr(e^{-\beta H})}$$

$$\alpha_t(Q) = e^{itH}Qe^{-itH}, \quad \alpha_{i\beta}(Q) = e^{-\beta H}Qe^{\beta H}$$

平衡状態

$$\psi_\beta(Q) = \frac{tr(e^{-\beta H}Q)}{tr(e^{-\beta H})}$$

$$\alpha_t(Q) = e^{itH}Qe^{-itH}, \quad \alpha_{i\beta}(Q) = e^{-\beta H}Qe^{\beta H}$$

$$\psi_\beta(Q_1\alpha_{i\beta}(Q_2)) \quad =$$

平衡状態

$$\psi_\beta(Q) = \frac{tr(e^{-\beta H}Q)}{tr(e^{-\beta H})}$$

$$\alpha_t(Q) = e^{itH}Qe^{-itH}, \quad \alpha_{i\beta}(Q) = e^{-\beta H}Qe^{\beta H}$$

$$\psi_\beta(Q_1\alpha_{i\beta}(Q_2)) \quad = \quad \frac{tr(e^{-\beta H}Q_1e^{-\beta H}Q_2e^{\beta H})}{tr(e^{-\beta H})}$$

平衡状態

$$\psi_\beta(Q) = \frac{tr(e^{-\beta H}Q)}{tr(e^{-\beta H})}$$

$$\alpha_t(Q) = e^{itH}Qe^{-itH}, \quad \alpha_{i\beta}(Q) = e^{-\beta H}Qe^{\beta H}$$

$$\psi_\beta(Q_1\alpha_{i\beta}(Q_2)) = \frac{tr(e^{-\beta H}Q_1e^{-\beta H}Q_2e^{\beta H})}{tr(e^{-\beta H})}$$

$$= \frac{tr(e^{-\beta H}Q_2e^{\beta H}e^{-\beta H}Q_1)}{tr(e^{-\beta H})}$$

平衡状態

$$\psi_\beta(Q) = \frac{tr(e^{-\beta H}Q)}{tr(e^{-\beta H})}$$

$$\alpha_t(Q) = e^{itH}Qe^{-itH}, \quad \alpha_{i\beta}(Q) = e^{-\beta H}Qe^{\beta H}$$

$$\psi_\beta(Q_1\alpha_{i\beta}(Q_2)) = \frac{tr(e^{-\beta H}Q_1e^{-\beta H}Q_2e^{\beta H})}{tr(e^{-\beta H})}$$

$$= \frac{tr(e^{-\beta H}Q_2e^{\beta H}e^{-\beta H}Q_1)}{tr(e^{-\beta H})} = \frac{tr(e^{-\beta H}Q_2Q_1)}{tr(e^{-\beta H})}$$

平衡状態

$$\psi_\beta(Q) = \frac{tr(e^{-\beta H}Q)}{tr(e^{-\beta H})}$$

$$\alpha_t(Q) = e^{itH}Qe^{-itH}, \quad \alpha_{i\beta}(Q) = e^{-\beta H}Qe^{\beta H}$$

$$\begin{aligned}
\psi_\beta(Q_1\alpha_{i\beta}(Q_2)) &= \frac{tr(e^{-\beta H}Q_1e^{-\beta H}Q_2e^{\beta H})}{tr(e^{-\beta H})} \\
= \frac{tr(e^{-\beta H}Q_2e^{\beta H}e^{-\beta H}Q_1)}{tr(e^{-\beta H})} &= \frac{tr(e^{-\beta H}Q_2Q_1)}{tr(e^{-\beta H})} \\
&= \psi_\beta(Q_2Q_1)
\end{aligned}$$

ψ が KMS 状態（あるいは β-KMS 状態）:

$$\psi(Q_1\alpha_{i\beta}(Q_2)) = \psi(Q_2 Q_1)$$

ψ が KMS 状態（あるいは β-KMS 状態）:

$$\psi(Q_1 \alpha_{i\beta}(Q_2)) = \psi(Q_2 Q_1)$$

KMS = Kubo-Martin-Schwinger

ψ が KMS 状態（あるいは β-KMS 状態）:

$$\psi(Q_1\alpha_{i\beta}(Q_2)) = \psi(Q_2Q_1)$$

KMS = Kubo-Martin-Schwinger

一般に自発対称性の破れがあると KMS 状態は複数ある.
(c.f. イジング模型の ± 境界条件 ボーズ粒子系の BEC)

クラスター定理

クラスター定理

$\mathbf{Z}^{\mathbf{d}}$ 上の量子スピン系にもどる

クラスター定理

$\mathbf{Z}^{\mathrm{d}}$ 上の量子スピン系にもどる

$$K_\beta = \{\beta\text{-KMS 状態全体}\}, \quad K_\infty = \{\text{基底状態全体}\}$$

これらは閉凸集合

クラスター定理

Z^{d} 上の量子スピン系にもどる

$$K_\beta = \{\beta\text{-KMS 状態全体}\}, \quad K_\infty = \{\text{基底状態全体}\}$$

これらは閉凸集合

格子上の並進 translation τ_k :

$$\tau_k(Q^{(l)}) = Q^{(l+k)}, \quad (k, l \in \mathrm{Z}^{\mathrm{d}}),$$

をみたす自己同型

クラスター定理

Z^{d} 上の量子スピン系にもどる

$$K_\beta = \{\beta\text{-KMS 状態全体}\}, \quad K_\infty = \{\text{基底状態全体}\}$$

これらは閉凸集合

格子上の並進 translation τ_k :

$$\tau_k(Q^{(l)}) = Q^{(l+k)}, \quad (k, l \in \mathrm{Z}^{\mathrm{d}}),$$

をみたす自己同型

$$\tau_k(A+B) = \tau_k(A) + \tau_k(B)\,, \quad \tau_k(AB) = \tau_k(A)\tau_k(B)$$

$$\tau_k(A^*) = \tau_k(A)^*, \quad A, B \in \mathcal{A}.$$

K_β，K_∞ の端点でクラスター定理が成立

$$\lim_{|i|\to\infty} \varphi(Q_1\tau_i(Q_2) = \lim_{|i|\to\infty} \quad \varphi(Q_1)\varphi(\tau_i(Q_2))$$

K_β，K_∞ の端点でクラスター定理が成立

$$\lim_{|i|\to\infty} \varphi(Q_1\tau_i(Q_2)) = \lim_{|i|\to\infty} \varphi(Q_1)\varphi(\tau_i(Q_2))$$

例えば，

K_β，K_∞ の端点でクラスター定理が成立

$$\lim_{|i|\to\infty} \varphi(Q_1\tau_i(Q_2)) = \lim_{|i|\to\infty} \varphi(Q_1)\varphi(\tau_i(Q_2))$$

例えば，
相転移が起こらず KMS 状態が並進不変である時

K_β，K_∞ の端点でクラスター定理が成立

$$\lim_{|i|\to\infty} \varphi(Q_1\tau_i(Q_2)) = \lim_{|i|\to\infty} \varphi(Q_1)\varphi(\tau_i(Q_2))$$

例えば，
相転移が起こらず KMS 状態が並進不変である時
基底状態が並進不変純粋状態である時，

K_β，K_∞ の端点でクラスター定理が成立

$$\lim_{|i|\to\infty} \varphi(Q_1\tau_i(Q_2)) = \lim_{|i|\to\infty} \varphi(Q_1)\varphi(\tau_i(Q_2))$$

例えば，
相転移が起こらず KMS 状態が並進不変である時
基底状態が並進不変純粋状態である時，

$$\lim_{|i|\to\infty} \varphi(Q_1\tau_i(Q_2)) = \varphi(Q_1)\varphi(Q_2)$$

K_β，K_∞ の端点でクラスター定理が成立

$$\lim_{|i|\to\infty} \varphi(Q_1\tau_i(Q_2) = \lim_{|i|\to\infty} \quad \varphi(Q_1)\varphi(\tau_i(Q_2))$$

例えば，
相転移が起こらず KMS 状態が並進不変である時
基底状態が並進不変純粋状態である時，

$$\lim_{|i|\to\infty} \varphi(Q_1\tau_i(Q_2) = \varphi(Q_1)\varphi(Q_2)$$

End of Part 2