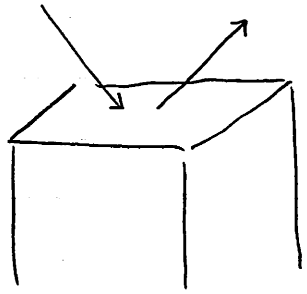
He4の励起スペクトル; Feynmanの理論 (single mode approximation)

背景　中性子散乱 実験



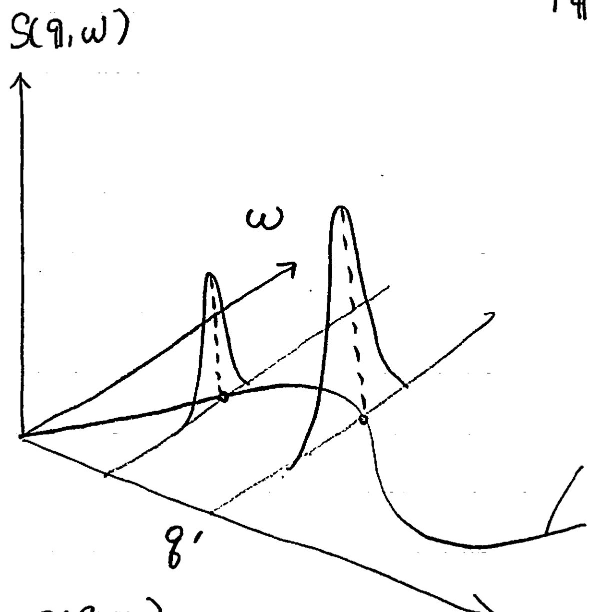
散乱強度 ∝ $S(q,\omega)$ 動的構造因子

$T=0$

$$\sum_\ell |\langle \ell | \hat\rho_q | g \rangle|^2 \delta(\omega - E_\ell + E_g)$$

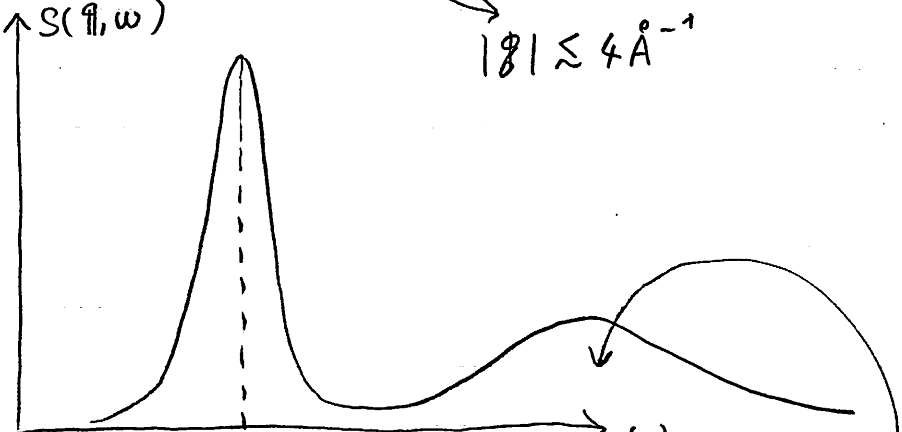
励起状態　基底状態

$$\hat\rho_q = \sum_k \hat a^\dagger_k \hat a_{k+q}$$



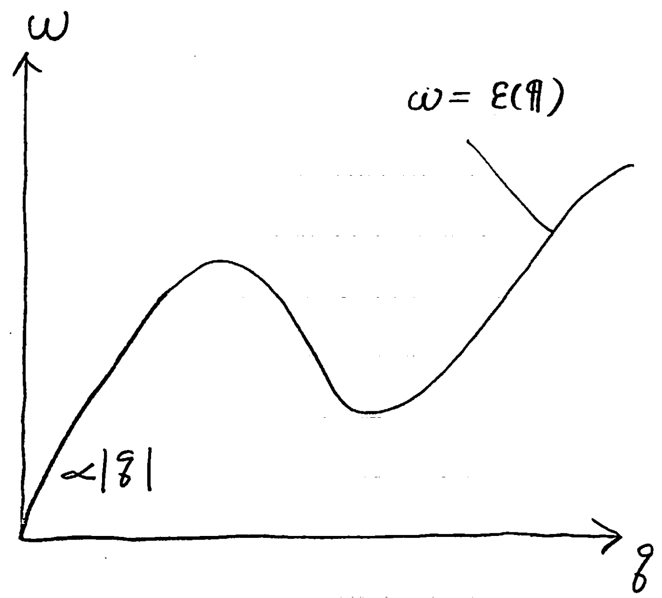
$\omega = \varepsilon(q)$ 鋭いピークの位置

$|q| \lesssim 4\text{Å}^{-1}$



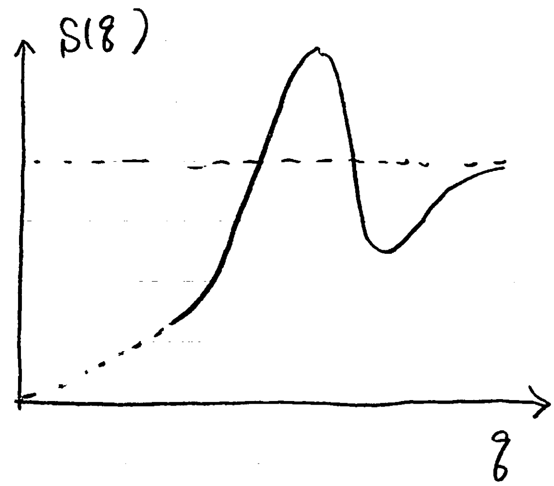
$$S(\vec q,\omega) \sim \frac{N}{\Omega} Z_q\, \delta(\omega - \varepsilon(q)) + \tilde S(q,\omega)$$ と近似できる

なめらか



$$S(q) = \frac{1}{N}\int_0^{\infty} d\omega\ S(q,\omega)$$

静的構造因子



Feynmanの着想

$\hat{\rho}_q |g\rangle \equiv |\Phi_q\rangle$ はほぼエネルギー固有状態

$$\Big\downarrow \text{帰結}$$

$$\varepsilon(q) = \frac{q^2}{2m\,S(q)}$$

励起エネルギー $\rightleftarrows$ 構造因子

励起エネルギーの期待値

$$\varepsilon(q) = \frac{\langle \Phi_q | \hat{\mathcal{H}} | \Phi_q \rangle}{\langle \Phi_q | \Phi_q \rangle} - E_g$$

$$= \frac{\langle g | \hat{\rho}_q^{\dagger} (\hat{\mathcal{H}} - E_g) \hat{\rho}_q | g \rangle}{\langle g | \hat{\rho}_q^{\dagger} \hat{\rho}_q | g \rangle}$$

分母 ; $\langle g|\hat{\rho}_q^{+}\hat{\rho}_q|g\rangle = \sum_{l}|\langle l|\hat{\rho}_{-q}|g\rangle|^2$

$\hat{1} \equiv \sum_{l}|l\rangle\langle l|$

$$= \sum_{l}|\langle l|\hat{\rho}_q|g\rangle|^2 \int_0^\infty d\omega\, \delta(\omega - E_l + E_g)$$

$$= \int_0^\infty d\omega \sum_{l}|\langle l|\hat{\rho}_q|g\rangle|^2 \delta(\omega - E_l + E_g)$$

$$= \int_0^\infty d\omega\, S(q,\omega) = N S(q) \quad ☆$$

分子 ; $\langle g|\hat{\rho}_q^{+}(\hat{\mathcal{H}} - E_g)\hat{\rho}_q|g\rangle$

$= \langle g|\hat{\rho}_q^{+}[\hat{\mathcal{H}}, \hat{\rho}_q]|g\rangle$ 相互作用は $\hat{\rho}_q$ と可換

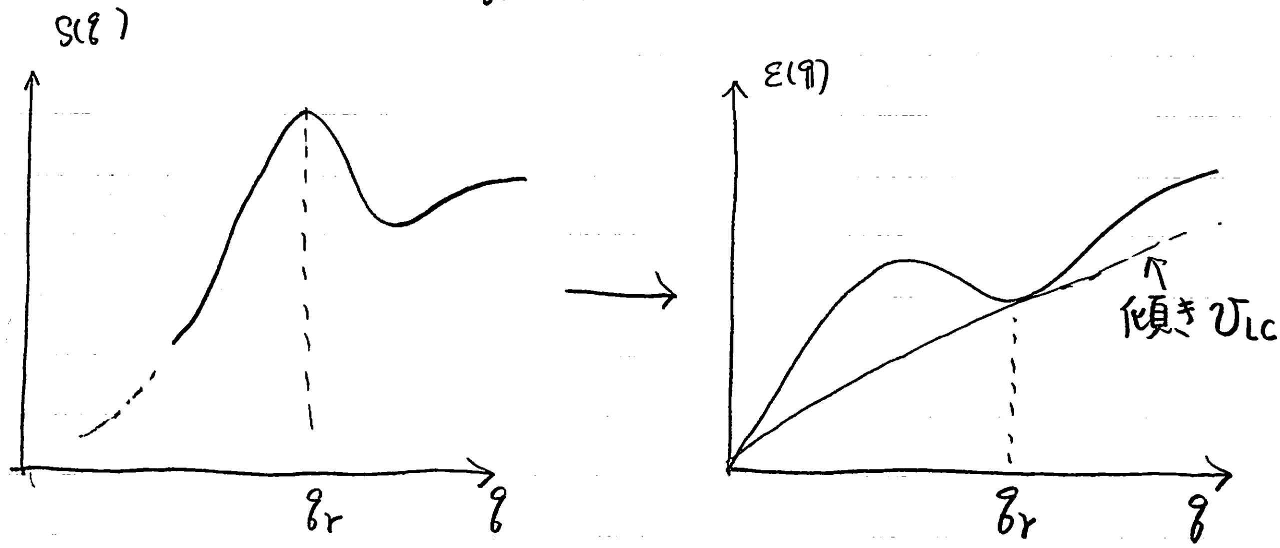
$= \langle g|\hat{\rho}_q^{+}[\hat{\mathcal{H}}_0, \hat{\rho}_q]|g\rangle$ $\quad \hat{\mathcal{H}}_0 = \sum_{k}\frac{k^2}{2m}\hat{a}_k^{+}\hat{a}_k$

$|g\rangle$の空間反転対称性

$$= \frac{1}{2}\langle g|\underbrace{[\hat{\rho}_q^{+}, [\hat{\mathcal{H}}_0, \hat{\rho}_q]]}_{\frac{Nq^2}{2m}\hat{1}}|g\rangle = \frac{Nq^2}{2m} \cdots ☆☆$$

系のdetailに依らない
(f-sum rule)

☆, ☆☆ $\longrightarrow \varepsilon(q) = \dfrac{\frac{Nq^2}{2m}}{NS(q)} = \dfrac{q^2}{2m\,S(q)}$



Feynman 理論を用いて Hess-Fairbank 効果を示す

線形応答（一次摂動）

応答量 $\hat{J}(\mathbb{r}) = \dfrac{1}{2}\sum_j \left(\hat{v}_j\, \delta(\mathbb{r}-\hat{\mathbb{r}}_j) + \delta(\mathbb{r}-\hat{\mathbb{r}}_j)\, \hat{v}_j \right)$ 対称化積 symmetrized product

摂動ハミルトニアン $-\omega\cdot\hat{\mathbb{L}} = -\omega\cdot\sum_j \hat{\mathbb{r}}_j \times \hat{\mathbb{P}}_j$

$= -\sum_j \hat{\mathbb{P}}_j \cdot (\omega \times \hat{\mathbb{r}}_j)$ → $A(\hat{\mathbb{r}}_j)$ とおく

（⟷ 一様磁場 $\mathbb{B}$ の ベクトルポテンシャル $\mathbb{A} = \mathbb{r} \times \mathbb{B}$）

$\nabla\cdot\mathbb{A} = 0$ より

$= -\dfrac{1}{2}\sum_j \left(\hat{\mathbb{P}}_j \cdot \mathbb{A}(\hat{\mathbb{r}}_j) + \mathbb{A}(\hat{\mathbb{r}}_j)\cdot \mathbb{P}_j \right)$

$$= -m \int d\mathbf{r} \;\; \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})$$

$$= -m \sum_{q} \hat{\mathbf{J}}(-q) \cdot \mathbf{A}(q)$$

Fourier Trasf.

$$\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{q} \hat{\mathbf{J}}(q)\, e^{iq\cdot\mathbf{r}}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{q} \mathbf{A}(q)\, e^{iq\cdot\mathbf{r}}$$

Ω : Volume

$$\bar{j}_\mu(q) \equiv \langle \hat{j}_\mu(q) \rangle \;, \quad \mu = x, y, z$$

$$\bar{j}_\mu(q) = -m\, Q^R_{\mu\nu}(q) A_\nu(q) \;, \quad \mu, \nu = x, y, z$$

$$Q^R_{\mu\nu}(q) = -i \int_0^\infty \langle g |\, [\, \underbrace{\hat{j}_\mu(q,t)}_{e^{i\hat{\mathcal{H}}t/\hbar}\, \bar{j}_\mu(q)\, e^{-i\hat{\mathcal{H}}t/\hbar}}, \hat{j}_\nu(-q)]\, | g \rangle\, e^{-\delta t} dt$$

線形応答理論

遅延グリーン関数
(R: Retarded)

Heisenberg 表示

収束因子
$(\delta \gtrsim 0)$
無限小、正の定数

系は等方的であるとすると

$$Q^R_{\mu\nu}(q) = \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} Q_L(\underset{\sim}{q}) + \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right) Q_T(\underset{\sim}{q})$$ とおける.

$$\underset{\sim}{q} \uparrow |q| \qquad\qquad \underset{\sim}{q} \uparrow |q|$$

L ; longitudinal
T ; transverse

◠ 今の場合 $\nabla\cdot\mathbb{A} = \nabla\cdot(\omega\times\mathbb{r}) = 0 \longrightarrow q\cdot A(q) = q_\nu A_\nu(q) = 0$ より

$$Q^R_{\mu\nu}(q) A_\nu(q) = \frac{q_\mu \overbrace{q_\nu A_\nu(q)}^{0}}{q^2}\Big(Q_L(q) + Q_T(q)\Big) + \delta_{\mu\nu} A_\nu(q) Q_T(q)$$

$$= Q_T(q) A_\mu(q)$$

$$\longrightarrow \quad \mathbb{J}(q) = -m\, Q_T(q)\, \mathbb{A}(q)$$

◠ 示すこと ; Feynmanの single-mode 近似 $\rightarrow Q_T(q) = 0$ ☆
(Hess-Fairbank効果)

$Q_T(q)$の計算

$\eta_q \cdot q = 0,\ \eta_q = \eta_{-q}$ となる実単位ベクトル η_q を導入
$(\eta_q^* = \eta_q,\ |\eta_q| = 1)$

$$(\eta_q)_\mu (\eta_{-q})_\nu\, Q^R_{\mu\nu}(q) = Q_T(q)$$

$$\rightarrow Q_T(q) = -i\int_0^\infty dt\, e^{-\delta t} \langle g | [\eta_q \cdot \hat{J}(q,t),\ \eta_{-q}\cdot \hat{J}(-q)] | g\rangle$$

$$= -\sum_l \left\{ \frac{|\langle l|\eta_q \cdot \hat{J}(q)|g\rangle|^2}{E_l - E_g} + (q \leftrightarrow -q) \right\}$$

励起状態

$\eta_q \cdot \hat{J}(q)$ ($\equiv \hat{J}_T(q)$ とおく)

$$= \eta_q \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_k \left(k + \frac{q}{2}\right) \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{k+q} \right) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_k (\eta_q \cdot k)\, \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{k+q}$$

($\eta_q \cdot \frac{q}{2} = 0$)

P.6 ☆を書き直すと

$$\langle l|\hat{J}_T(q)|g\rangle \rightarrow \langle \Phi_q | \hat{J}_T(q) | g\rangle = 0$$

$\langle l| \propto \langle \Phi_q|$

☆の前提 $|g\rangle$は空間反転について対称 … ※

$q \parallel z$軸. $\eta_q \parallel x$軸ととる

$x \rightarrow -x$とする鏡映演算子 $\hat{R}_x$を次の関係式を満たすものとして導入

$$\hat{R}_x^2 = \hat{1},\quad \hat{R}_x \underbrace{|0\rangle}_{\text{真空ベクトル}} = |0\rangle,\quad \hat{R}_x \hat{a}_k \hat{R}_x = \hat{a}_{\bar{k}},\quad \hat{R}_x \hat{a}_k^\dagger \hat{R}_x = \hat{a}_{\bar{k}}^\dagger$$

$$\bar{k} = (-k_x, k_y, k_z)$$

$\hat{R}_x$の性質 $\hat{R}_x \hat{a}_{\mathbb{k}+q} \hat{R}_x = \hat{a}_{\bar{\mathbb{k}}+q}$

$\hat{R}_x \hat{\rho}_q \hat{R}_x = \hat{\rho}_q$ ($\hat{R}_x$について $\hat{\rho}_q$は even)

$\hat{R}_x \hat{J}_T(q) \hat{R}_x = -\hat{J}_T(q)$ ($\hat{R}_x$について $\hat{J}_T$は odd)

$\langle \Phi_q | \hat{J}_T(q) | g \rangle$

$\doteq \langle g | \hat{\rho}_q^{+} \hat{J}_T(q) | g \rangle$

$= \langle g | \underbrace{\hat{R}_x^2}_{\hat{1}} \hat{\rho}_q^{+} \underbrace{\hat{R}_x^2}_{\hat{1}} \hat{J}_T(q) \underbrace{\hat{R}_x^2}_{\hat{1}} | g \rangle$

$= \underbrace{\langle g | R_x}_{※\ \langle g|} \underbrace{(\hat{R}_x \hat{\rho}_q^{+} \hat{R}_x)}_{\hat{\rho}_q^{+}} \underbrace{(\hat{R}_x \hat{J}_T(q) \hat{R}_x)}_{-\hat{J}_T(q)} \underbrace{R_x | g \rangle}_{|g\rangle\ ※} = -\langle g | \hat{\rho}_q^{+} \hat{J}_T(q) | g \rangle$ より

$\therefore \langle \Phi_q | \hat{J}_T(q) | g \rangle = 0$

※について、例えば $|g\rangle$として

$$|g\rangle = \Big(\hat{a}_0^{+2} + \sum_{\mathbb{k}(\neq 0)} \underset{\substack{\uparrow \\ |\mathbb{k}|}}{f_k} \hat{a}_{\mathbb{k}}^{+} \hat{a}_{-\mathbb{k}}^{+}\Big)^{N/2} |0\rangle$$ 等方的基底状態

(Leggett 2001, 2003)

を考えると

$$R_x|g\rangle = R_x\left[\hat{a}_0^{+2} + \sum_{\mathbb{k}(\neq 0)} f_k \hat{a}_{\mathbb{k}}^{+}\hat{a}_{-\mathbb{k}}^{+}\right]^{N/2} R_x^2|0\rangle$$

$$= \left(\hat{a}_0^{+2} + \sum_{\mathbb{k}\neq 0} f_k \hat{a}_{\mathbb{k}}^{+}\hat{a}_{-\mathbb{k}}^{+}\right)^{N/2} \underbrace{R_x|0\rangle}_{|0\rangle} = |g\rangle \text{ となる.}$$

$f_{|\mathbb{k}|}$ ともかける

注1) ここの議論は、流体をバルクと見て その応答を見ている.
系の応答が 系の形状や境界条件によらないときのみ正しい.

注2) BECはどこに効いているか.

BEC $\underset{?}{\longleftrightarrow}$ Hess-Fairbank効果 …… $\langle l|\hat{J}_T(\mathbb{q})|g\rangle \sim 0$
横 currentと coupleする
励起がない(少ない)ことが
重要

参考：他の例

ex1. 自由フェルミ気体

$$Q_T(q) = -\frac{N}{\Omega m} \rightarrow J(q) = \frac{N}{\Omega} A(q) \rightarrow J(r) = \frac{N}{\Omega} \overbrace{\omega \times r}^{A(r)}$$

容器と共に剛体的に回転

ex2. BCS状態

$$\lim_{q \to 0} Q_T(q) = 0.$$ Hess-Fairbank効果

ex3. 自由ボース気体

$$Q_T(q) = 0.$$ Hess-Fairbank効果 ?!

$$|g_N\rangle \equiv \frac{(\hat{a}_0^+)^N}{\sqrt{N!}} |0\rangle$$

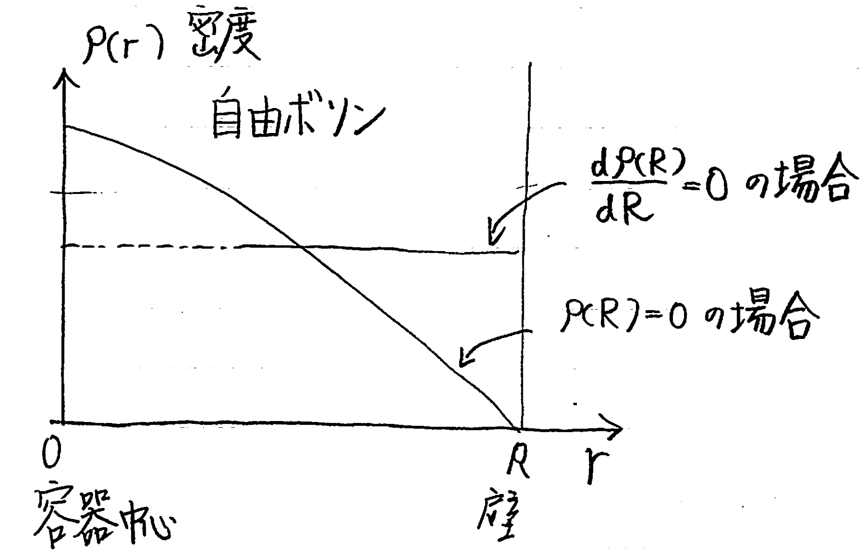
$$\hat{J}_T(q) = \sum_k \frac{\eta_q \cdot k}{\sqrt{\Omega}} \hat{a}_k^+ \underbrace{\hat{a}_{k+q} |g_N\rangle}_{\delta_{k+q,0} \underbrace{\frac{(\hat{a}_0^+)^{N-1}}{\sqrt{(N-1)!}} |0\rangle}_{|g_{N-1}\rangle}}$$

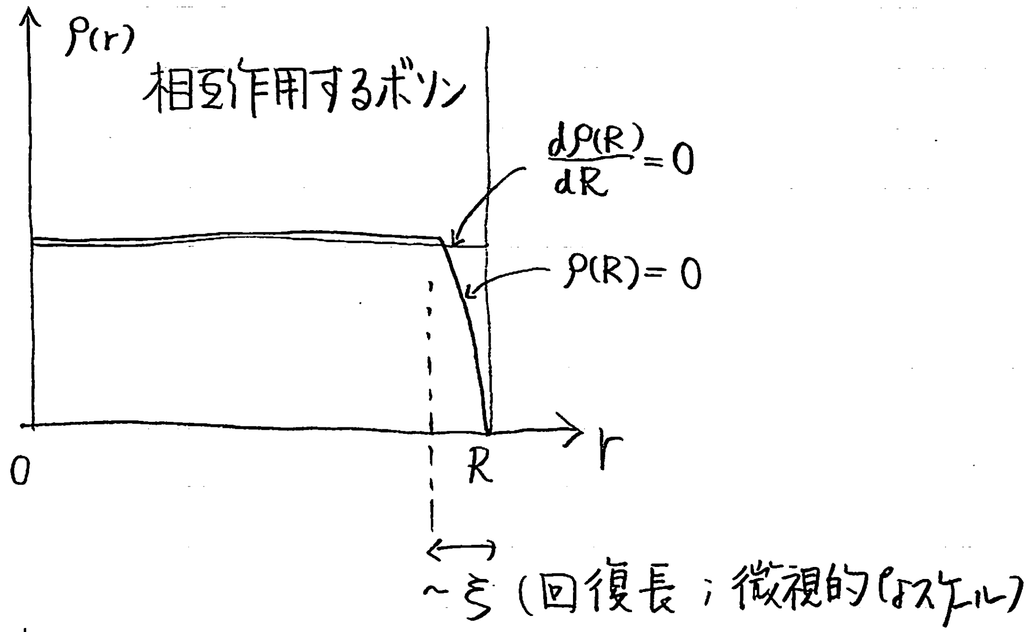
$k=-q$ のみ

$$= \frac{\overbrace{\eta_q \cdot (-q)}^{0}}{\sqrt{\Omega}} \hat{a}_{-q}^+ |g_{N-1}\rangle = 0$$

自由ボース気体の場合，系の境界条件，形状に大きく依存

$\left(K = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial P} = \infty\right)$





参考2. 超伝導との比較

$$\underset{\text{電流密度}}{\mathbb{J}^e(\mathbb{r})} = e\,\mathbb{J}(\mathbb{r}) - \frac{e^2}{m}\frac{N}{\Omega}\mathbb{A}(\mathbb{r})$$

$\nabla\cdot\mathbb{A}=0$ なら

$\mathbb{A}(\mathbb{r})$, $\mathbb{J}(\mathbb{r})$ ゆるやか、

$$= -\frac{e^2}{m}\Bigl(\underbrace{\frac{N}{\Omega}}_{\frac{\rho_{tot}}{m}} + \underbrace{m\,Q_T(q\sim 0)}_{\frac{\rho_s-\rho_{tot}}{m}}\Bigr)\mathbb{A}(\mathbb{r})$$

$$= -\frac{e^2}{m^2}\rho_s\,\mathbb{A}(\mathbb{r})$$

HF効果 ⟷ London方程式 (Meissner効果)