

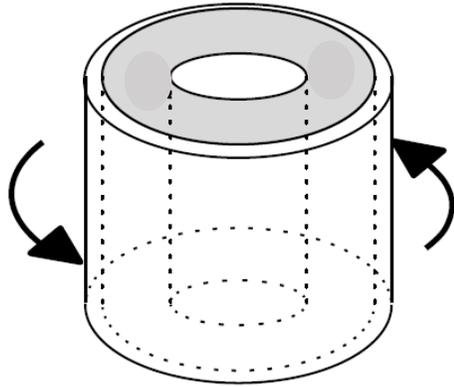
# 超流動とボース・アインシュタイン凝縮 の長年の未解決な関係

東京大学総合文化研究科 加藤雄介

- 一日目

- 超流動とは何かを理解する。
- 熱平衡状態の超流動(Hess-Fairbank 効果):  
超伝導を特徴づける量 非古典的回転慣性、超流動密度
- 超流動が起こらない例、起こる例

# 2つの超流動

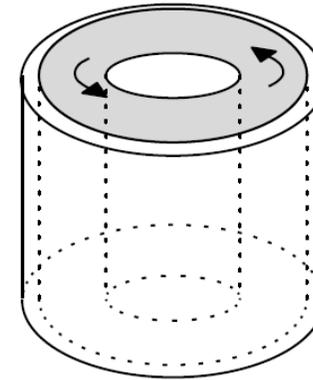


容器は回転しているが  
流体は止まっている。

Hess-Fairbank 効果

流体: 容器とともに回転する  
座標系からみて基底状態

非古典的回転慣性

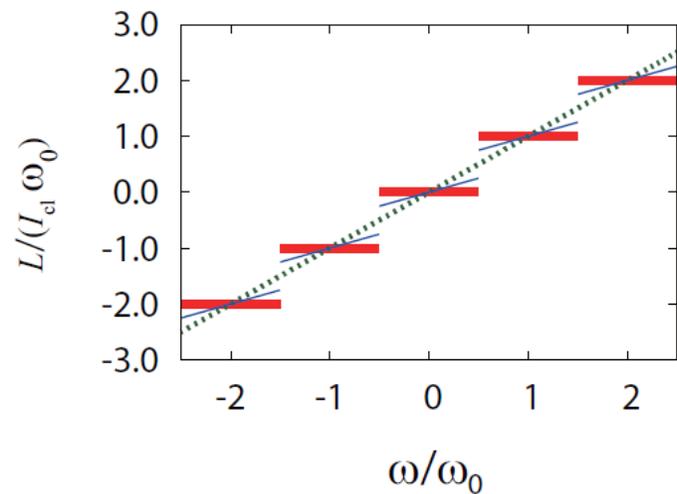


容器は止まっているが  
流体は止まらない。

永久流状態

流体: 容器とともに静止して  
いる座標系(実験室系)から  
みて準安定状態

エネルギー障壁



角速度  $\omega$  で回転している容器中の流体の角運動量

点線 古典流体

細い実線 有限温度超流体

太い実線 絶対零度超流体

非古典的回転慣性

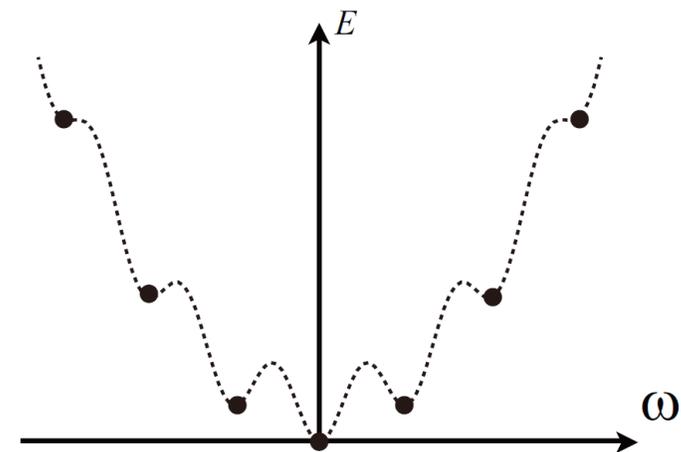


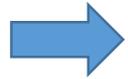
図 5: 永久流状態のエネルギーの角速度依存性。黒丸が永久流状態を表し、点線はその間を移り変わる過程の中間状態を表す。

エネルギー障壁

# 2つの固さ

位相の固さ

[ボース・アインシュタイン凝縮、マクロ波動関数の存在]



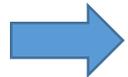
非古典的回転慣性、超流動密度

準安定状態の量子化 (winding number; 巻き付き数)

密度の固さ

[有限の圧縮率]

$$\kappa = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} < \infty$$

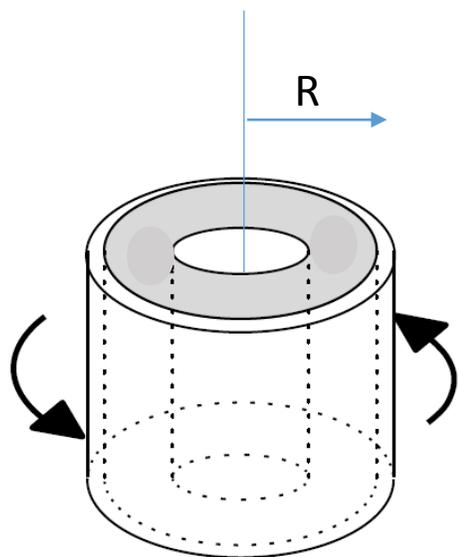


障害物ポテンシャル下での  
非古典的回転慣性、超流動密度

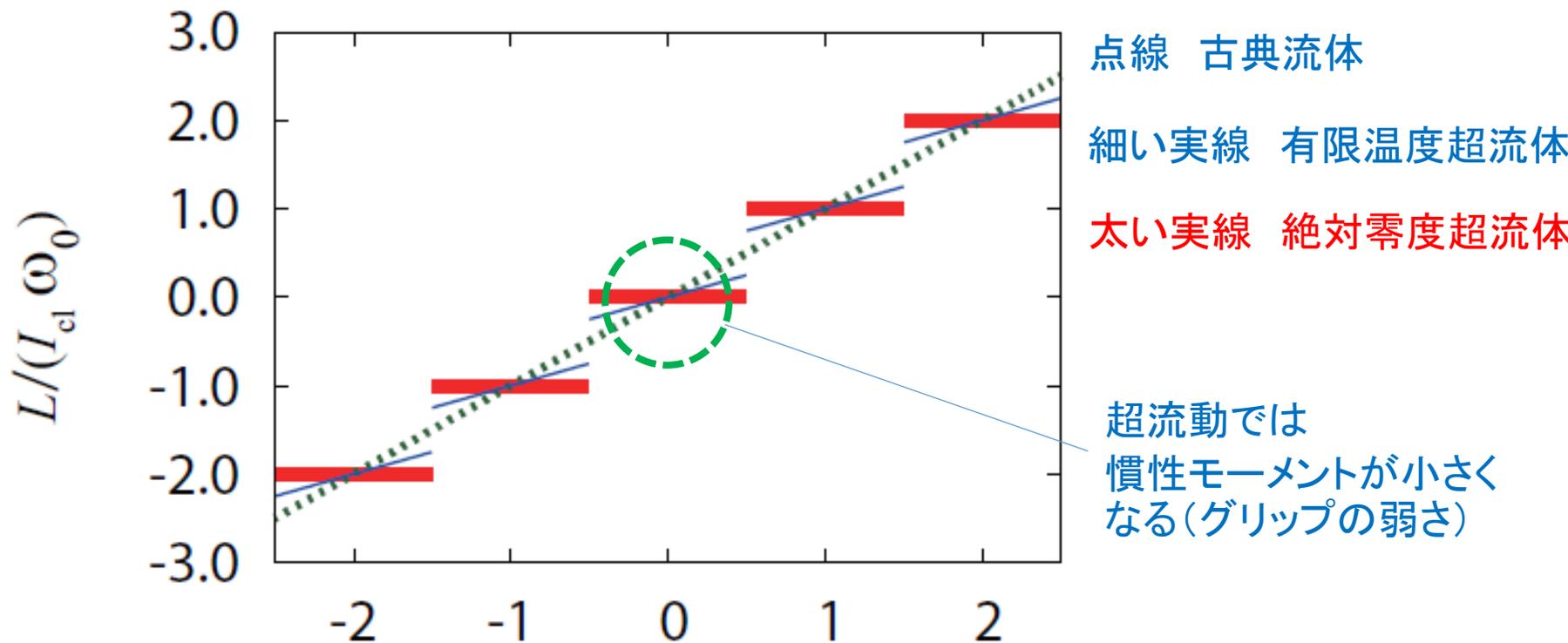
エネルギー障壁の大きさ

Cf 理想ボース気体: 位相は固いが、密度は柔らかい(圧縮率は無限大)  $\kappa = \infty$

# Hess-Fairbank 効果 (非古典的回転慣性)



容器は回転しているが  
流体は止まっている。

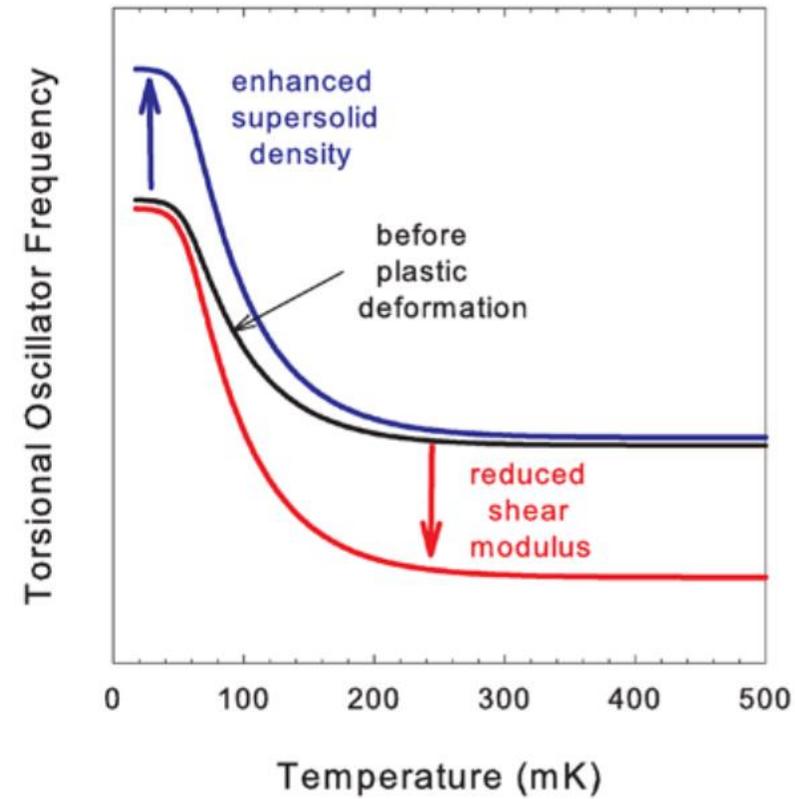
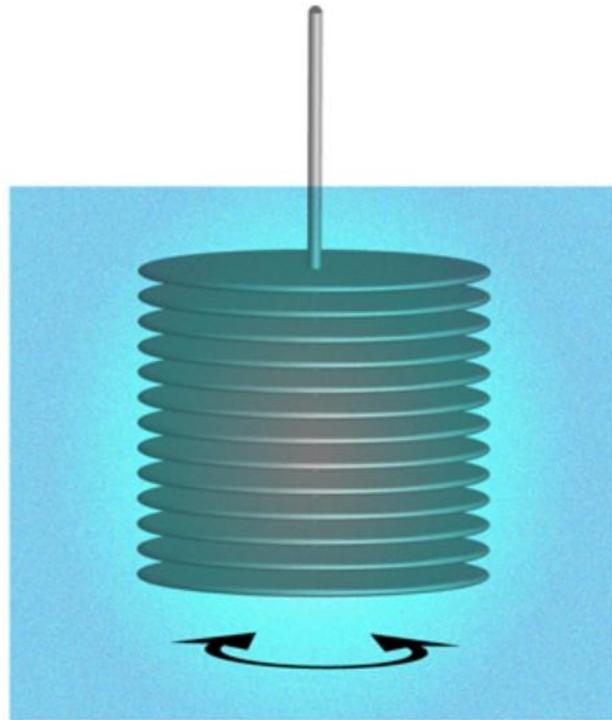


$$\omega/\omega_0 \quad \omega_0 = \hbar/(mR^2)$$

$$I_{cl} = NmR^2 \quad \text{古典的慣性モーメント}$$

# ねじり振り子の実験 (Torsional Oscillator experiments)

超流動の「軽さ」をとらえる実験



共鳴周波数  $(K/I)^{\frac{1}{2}}$

ねじりの弾性定数  $K$

# 超流動密度(superfluid density)

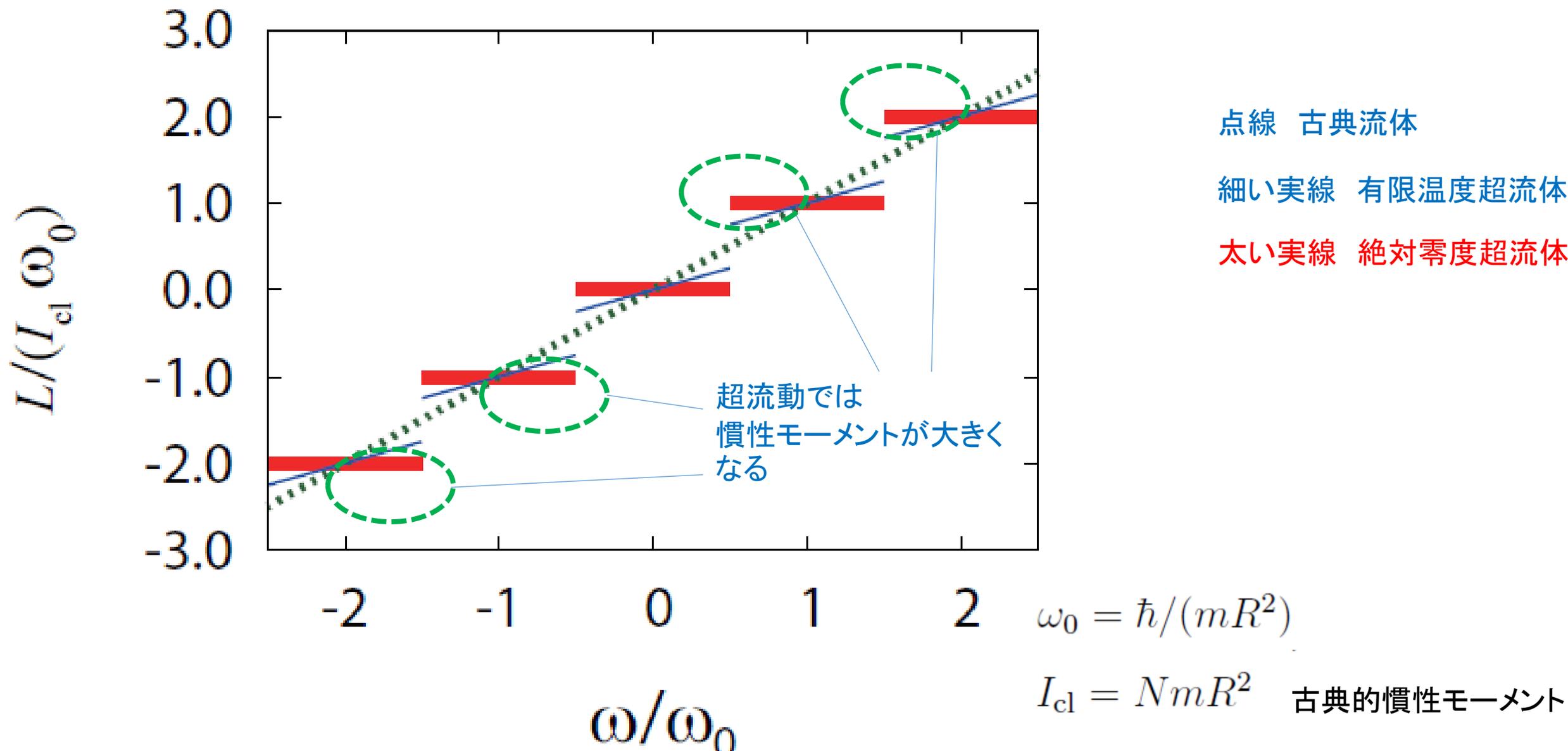
$$\rho_s = \rho \lim_{\omega \rightarrow 0} (I_{cl} - I) / I_{cl}$$

$\rho$  全質量密度

$\omega$  容器の回転の速さ

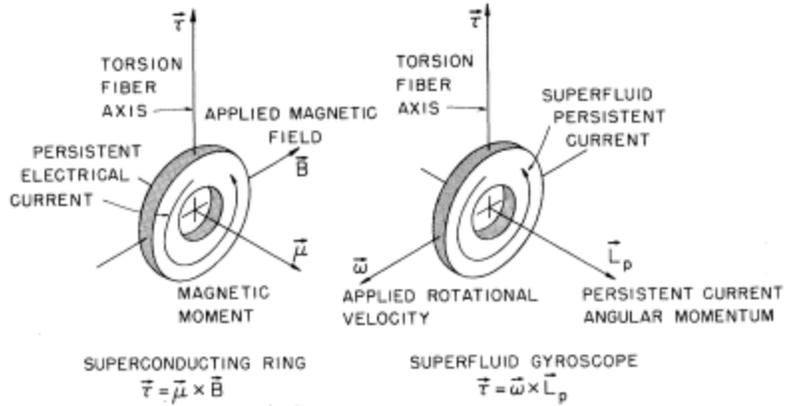
容器の回転に追従しない流体の割りあいを質量密度の次元を持つ量として表す。

# 超流動：軽くなるばかりではない、特徴は「ぎこちなさ」



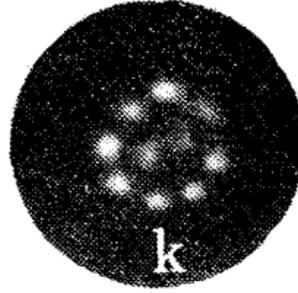
# 超流動 = まさつのない流れ

## 永久流



Clow-Reppy 1972

## 量子渦



Packerd group(UC Berkeley) 1979



Lathrop group(Maryland) 2013

## 非自明な熱力学効果



<http://superfluidsiiti.weebly.com/others1.html>

# 本講義のテーマ

- Q1 超流動とボースアインシュタイン凝縮の関係  
“理想ボース気体は超流動？”
- Q2 固体も超流動になれるか？  
“超固体”
- Q3 超流動が壊れるとき  
“エネルギー障壁とランドスケープ”

## 理解のために重要な視点

- 2つの超流動: 平衡状態の超流動と準安定状態の超流動
- 位相の固さと密度の固さ

# Topics I: Josephson effects in one-dimensional supersolids

Masaya Kunimi<sup>1</sup>, Yuki Nagai<sup>2</sup> and Yusuke Kato

## Model (Continued)

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Psi(x, t) + [U(x) - \mu] \Psi(x, t) + \int_{-L/2}^{L/2} dy V(x-y) |\Psi(y, t)|^2 \Psi(x, t)$$

Two-body soft-core interaction

$$V(x-y) \equiv g\theta(a - |x-y|) \quad \begin{array}{l} g; \text{ interaction strength,} \\ a; \text{ interaction range} \end{array}$$

Potential barrier

$$U(x) \equiv U_0\theta(d/2 - |x|) \quad \begin{array}{l} U_0; \text{ barrier height,} \\ d; \text{ range of potential barrier} \end{array}$$

## Stationary solutions

$$\Psi(x, t) = A(x)e^{i\varphi(x)}$$

Integral of motion  $J = \frac{\hbar}{m} A^2(x) \frac{d\varphi(x)}{dx} = \text{const}$  “Current”

Equation for A(x)

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m}{2} \frac{J^2}{A^4(x)} + [U(x) - \mu] + \int_{-L/2}^{L/2} dy V(x-y) A^2(y) \right\} A(x) = 0$$

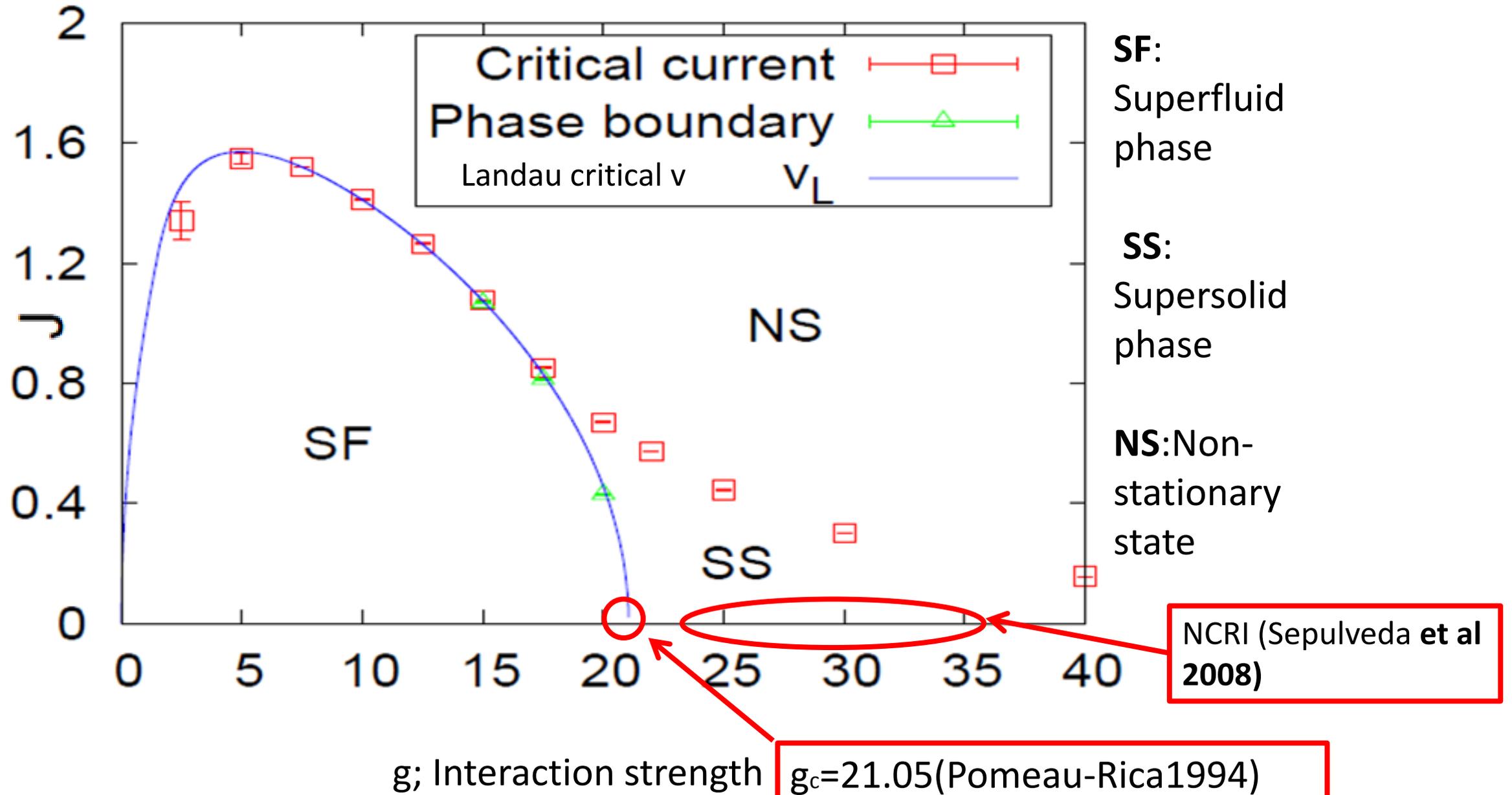
Existence of stationary solutions depends on  $U_0$  and  $J$

Dimensionless units

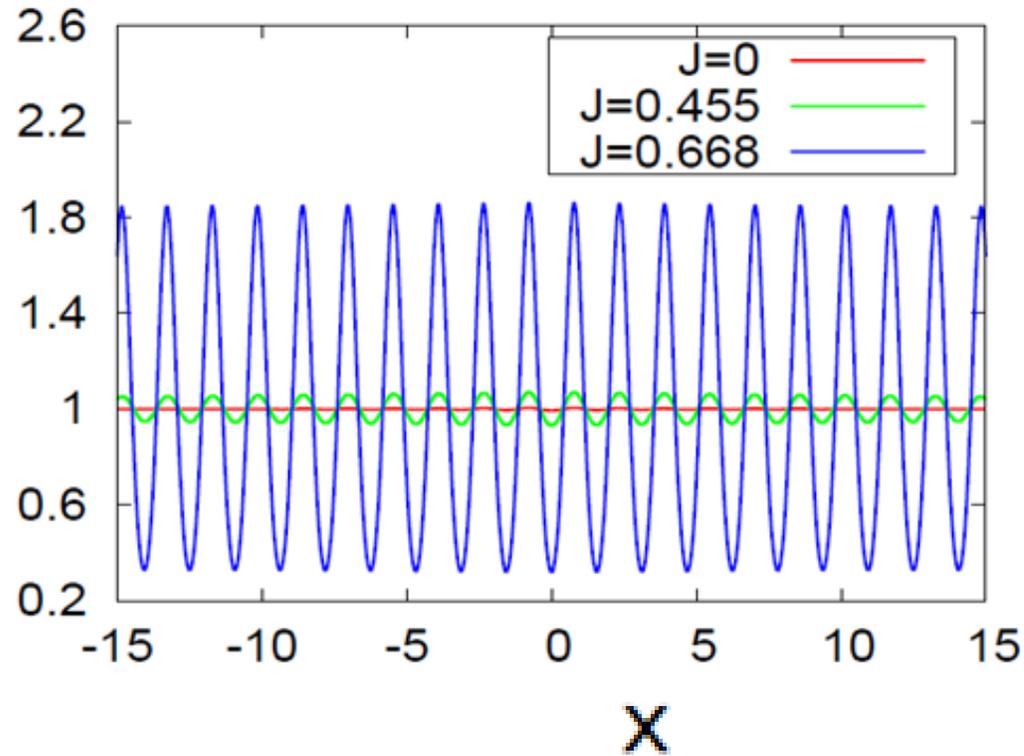
$$x' = \frac{x}{a}, \quad \mu' = \frac{\mu m a^2}{\hbar^2}, \quad U'_0 = \frac{U_0 m a^2}{\hbar^2},$$
$$g' = \frac{2n_0 m a^3 g}{\hbar^2}, \quad J' = \frac{J m a}{\hbar^2 n_0}.$$

The primes are dropped in the following

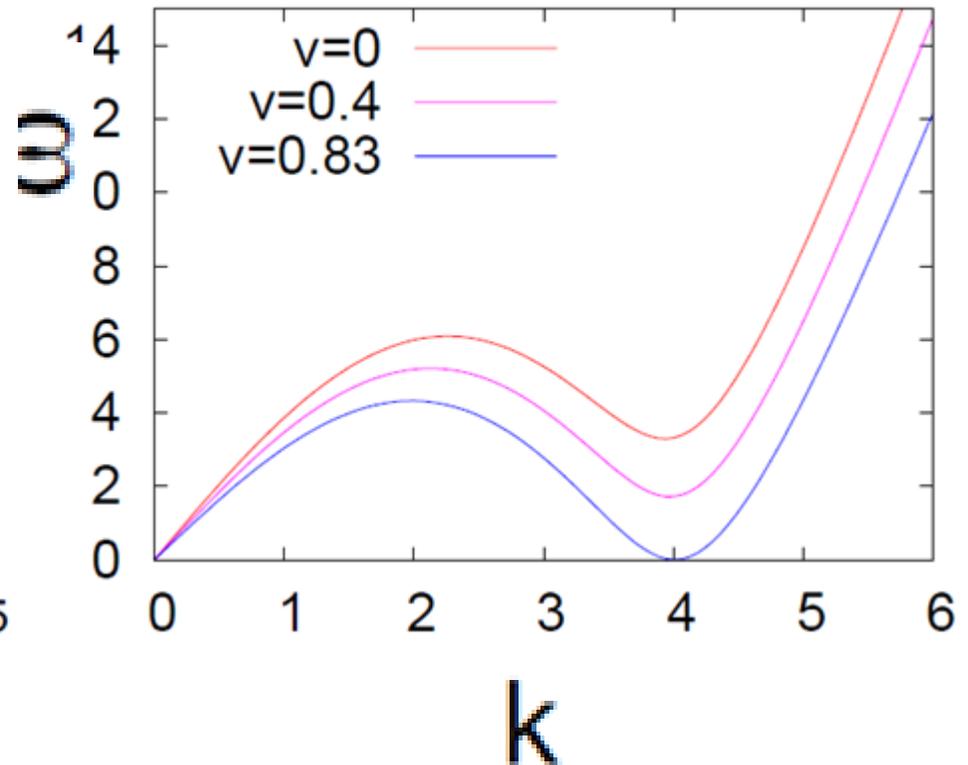
# Result 1: Phase Diagram in the absence of barrier



Spatial variation of condensate density for  $g=20$



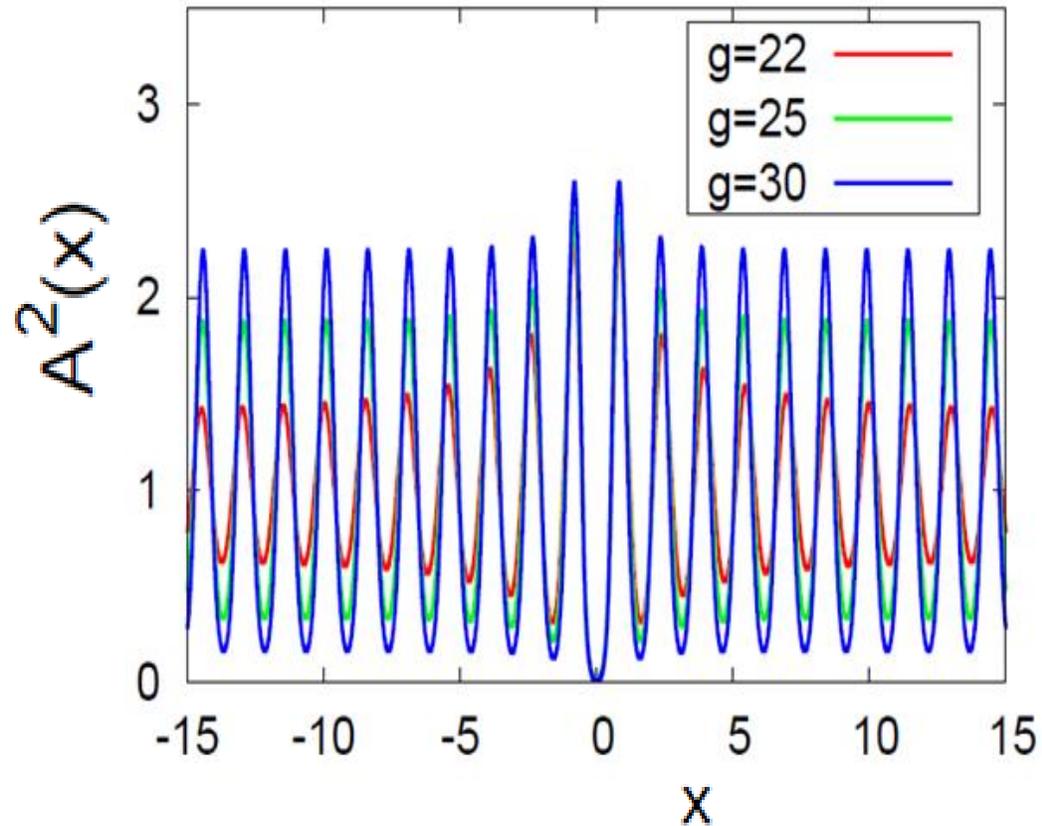
Excitation spectrum in liquid phase



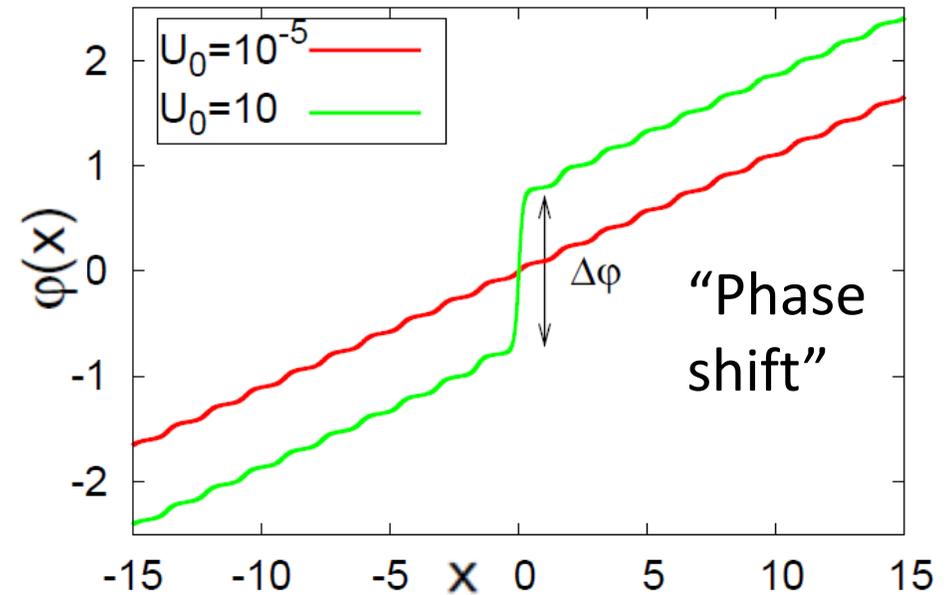
Cf. LDF(Ancilotto et al 2005)

## Result 2: Josephson effect in solid phase

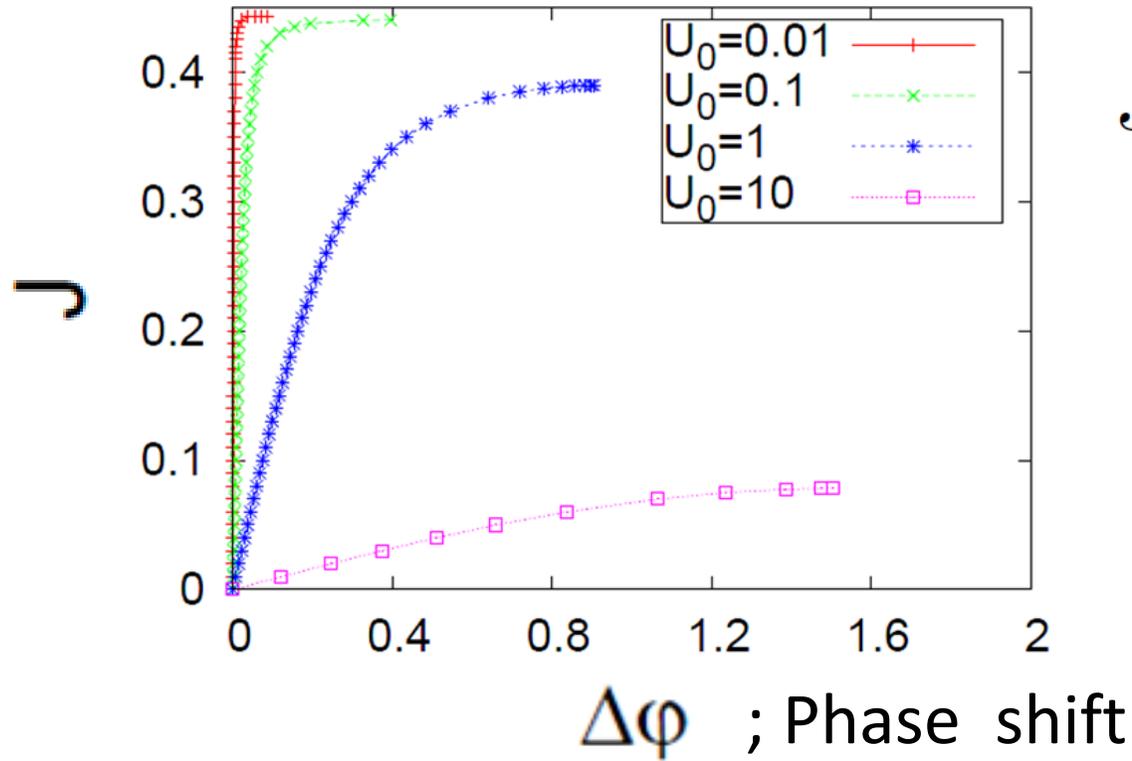
Spatial variation of condensate density in the presence of potential barrier around  $x=0$



Spatial variation of phase of condensate wave function in the presence of potential barrier around  $x=0$

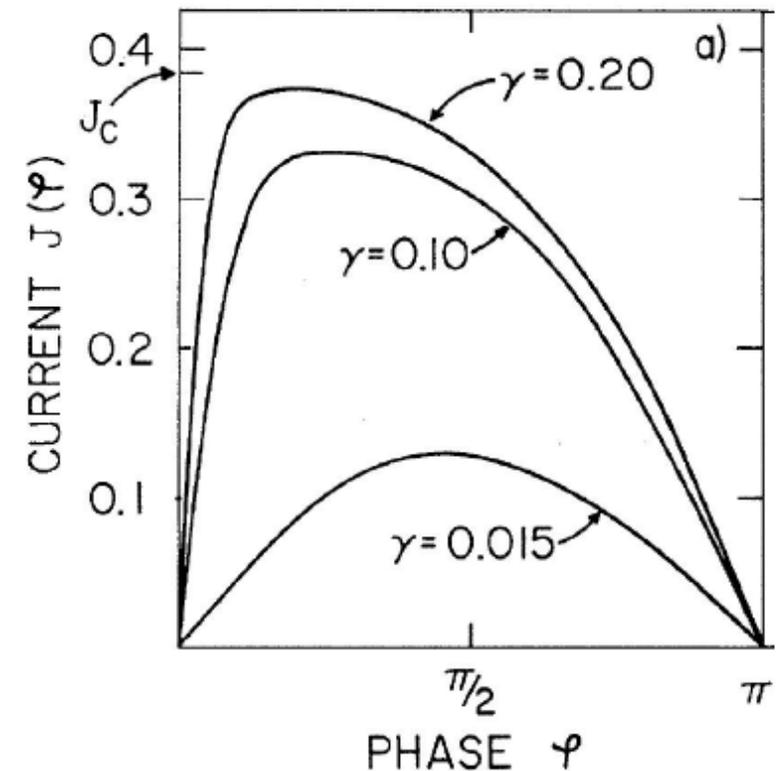


# Result 3: Josephson relation in solid phase



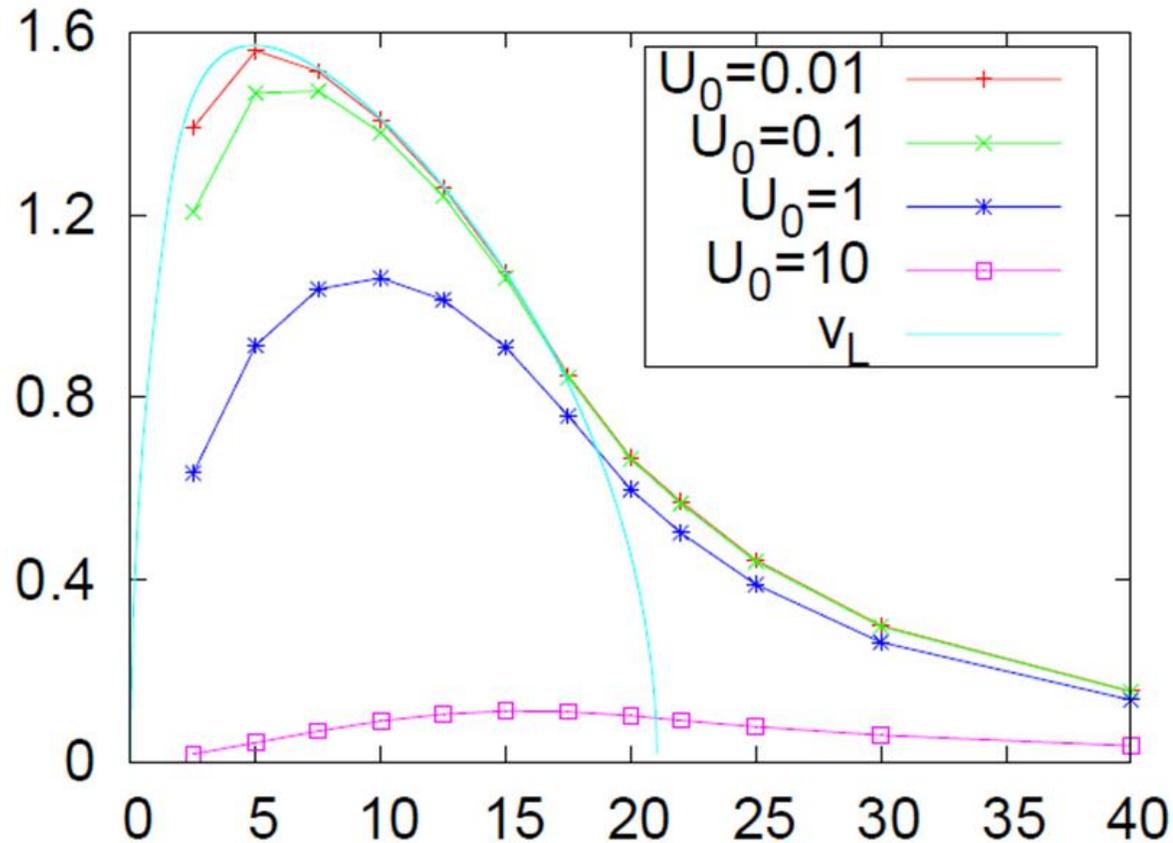
$J \propto \sin \Delta\varphi$  when the barrier is high.

Baratoff et al. (1970)



The above result (↑) for solid phase is similar to that of Josephson junction of superconductors.(→)

# Result 4: Critical Currents for various strength of two-body interaction and potential barrier



**g**; Interaction strength

Even above the Landau critical velocity, superfluidity can be maintained in the sense that the system exhibits the Josephson effect exist.

# Topics II "Two-dimensional flowing soft-core bosons modeling a supersolid" Kunimi-Kato (2012)

Model : 2D Gross-Pitaevskii Equation with finite-ranged interaction

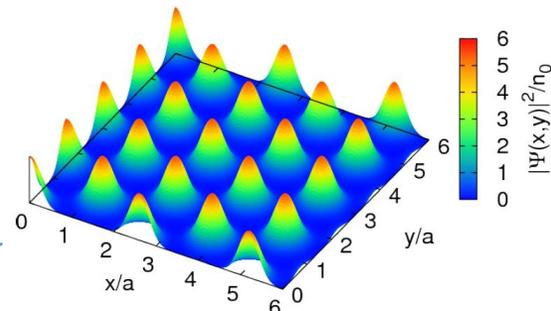
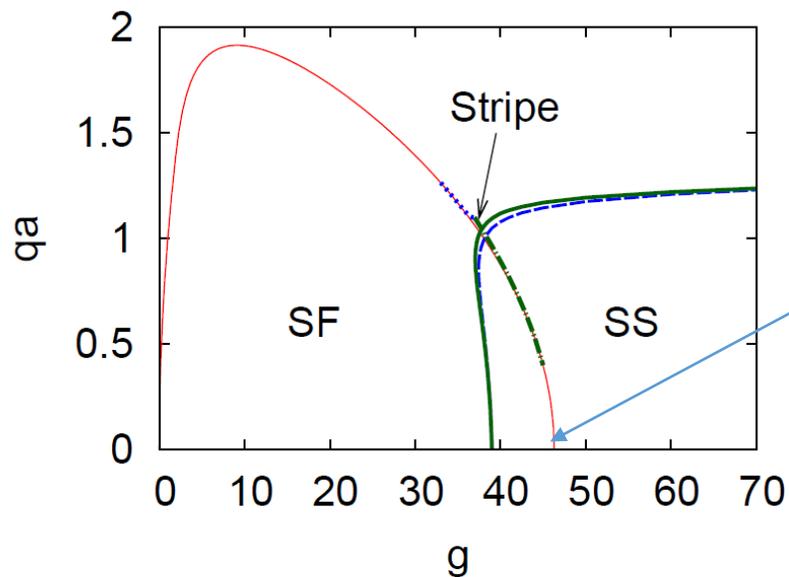


図 4.7  $g = 45$  における三角格子解の密度の空間プロファイル。

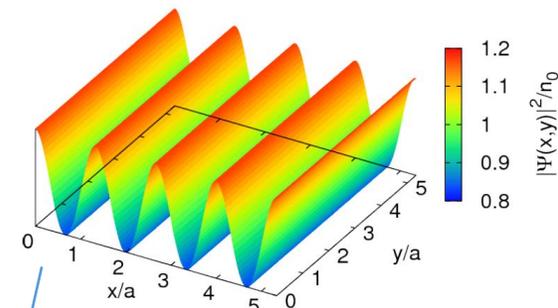


図 4.25  $g = 37.5$ ,  $qa = 1.05$  におけるストライプ相の密度プロファイル。+x 方

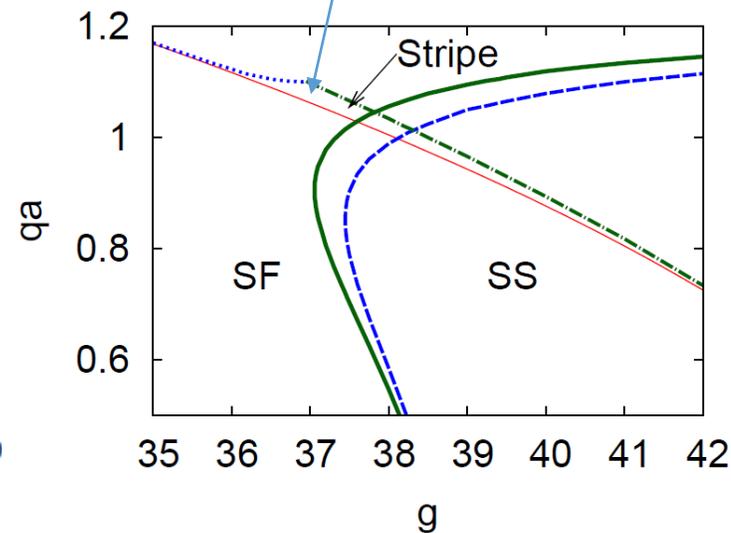


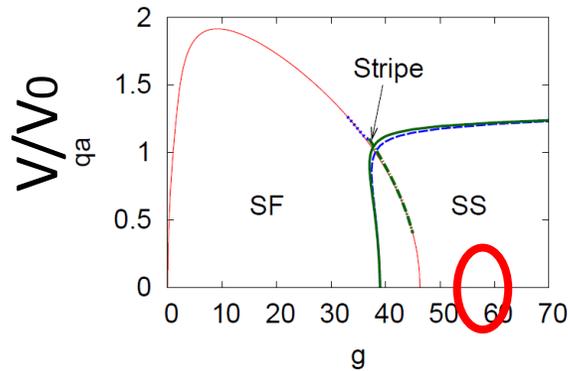
図 4.21 図 4.20 を拡大したもの。青破線が超固体相の Landau 不安定性のライン、緑線が超固体相の動的不安定性のライン、青点線がストライプ相における長波長の動的不安定性のライン、緑点破線がストライプ相の有限波数の動的不安定性のライン。

図 4.20 超流体相 (SF)、超固体相 (SS)、ストライプ相 (Stripe) の準安定なパラメータ領域を示した図。赤線が超流体相が Landau 不安定性のラインである。他

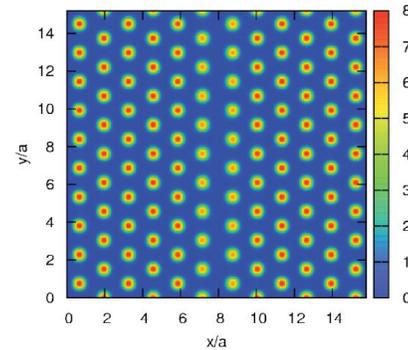


# Topics III: Josephson effects in two-dimensional supersolids

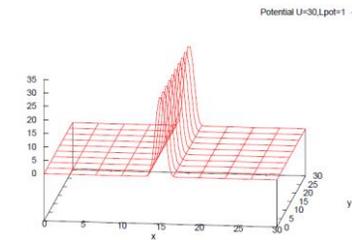
Anagama-Kunimi-Kato 2012



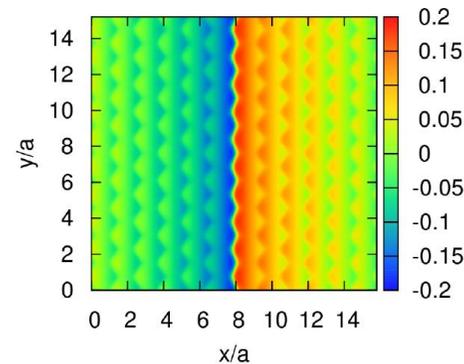
Density ( $\Lambda=60, v=0.1v_0$ )  
 $U_0=30\epsilon_0$



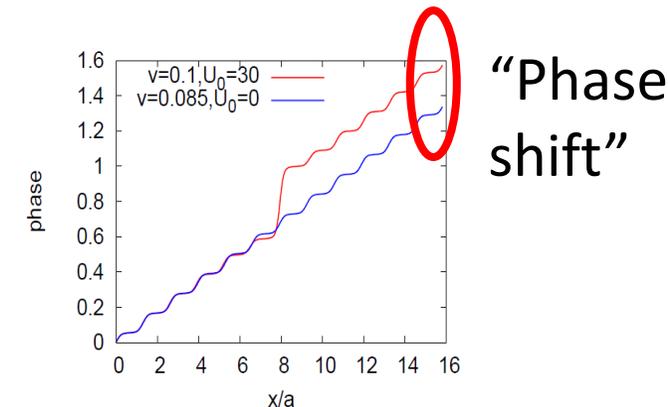
Profile of the potential barrier



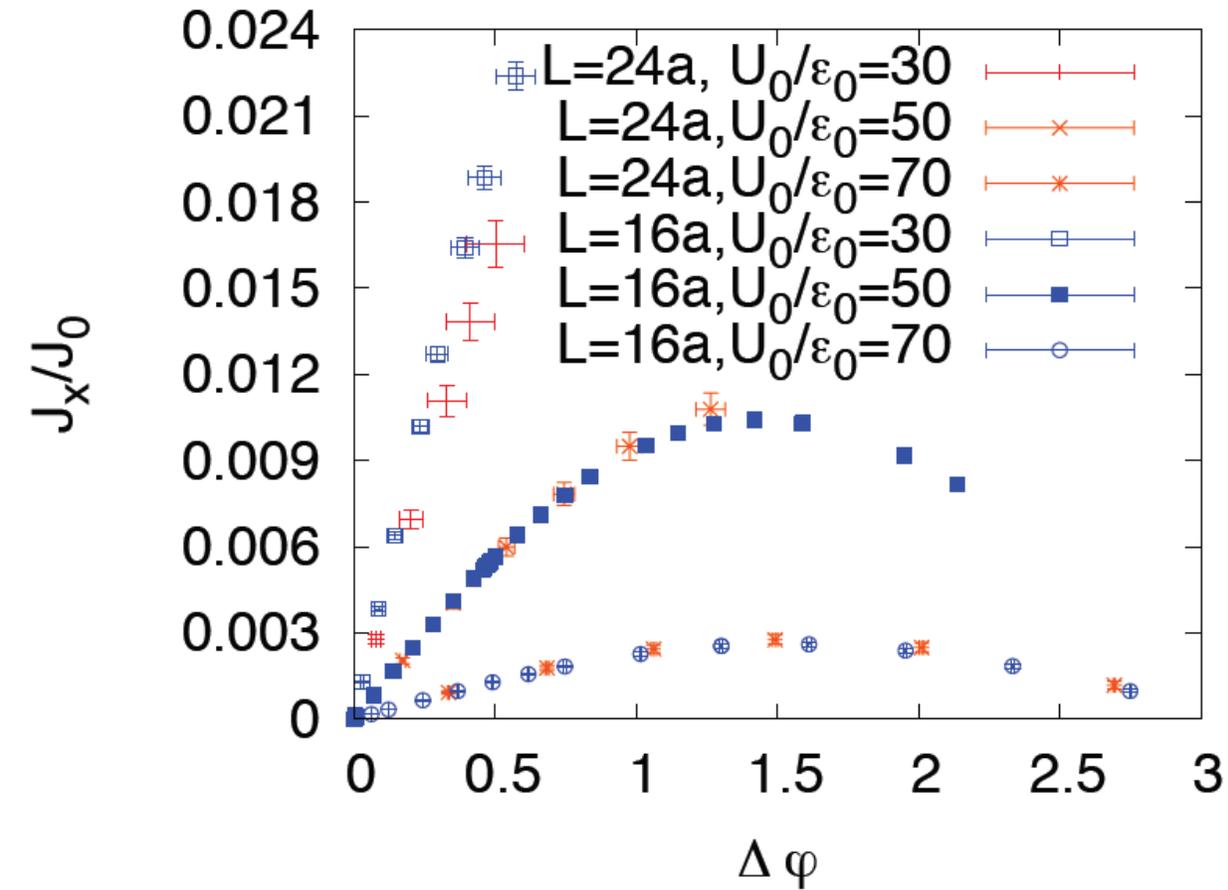
Phase ( $\Lambda=60, v=0.1v_0,$   
 $U_0=30\epsilon_0$ )



“Phase” under the external current



# Result : Josephson relation (Current-Phase relation)



$$\bar{J}_x = \frac{1}{L_y} \int_0^{L_y} dy \frac{\hbar}{m} \rho(x, y) \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x}$$

Our result implies that the Josephson effect is maintained in the thermodynamical limit.

# Landscape of 2D superfluids (Kunimi-Kato2015)

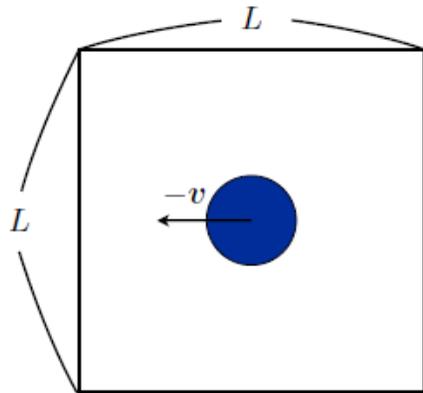


図 5.6 考えている系の模式図。

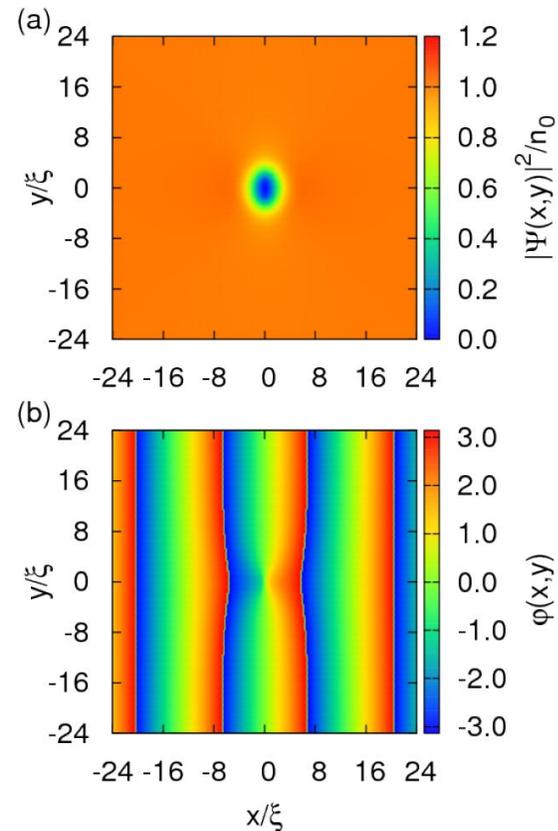


FIG. 6. (Color online) (a) Density profile, and (b) phase profile, for  $(L, U_0, d) = (48\xi, \epsilon_0, 2.5\xi)$  and  $v = 0.4608505v_s \simeq 0.9999984v_c$ .

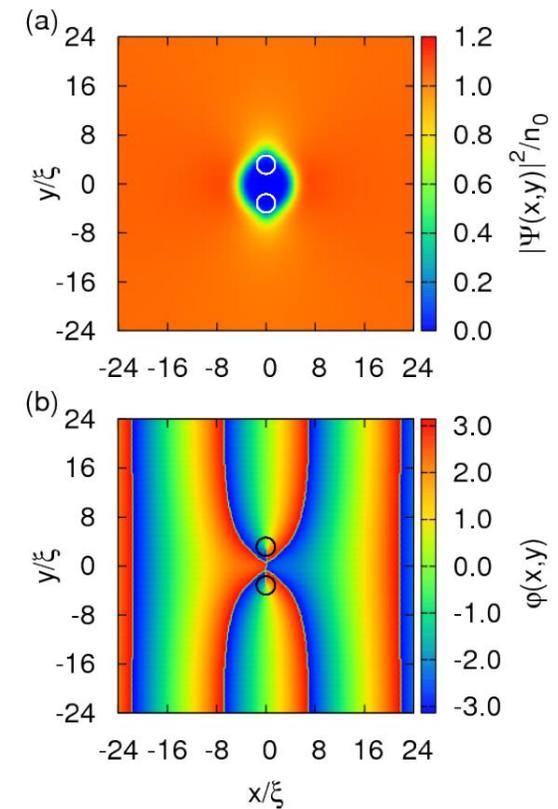
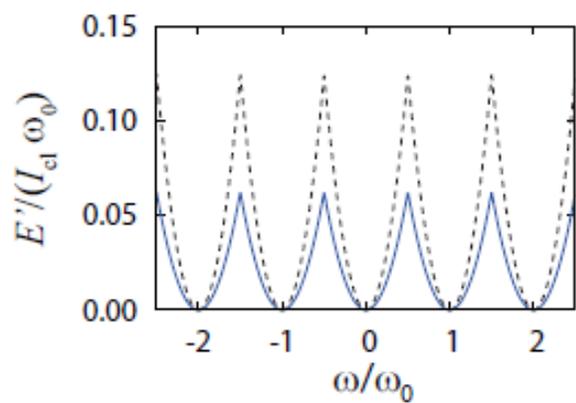
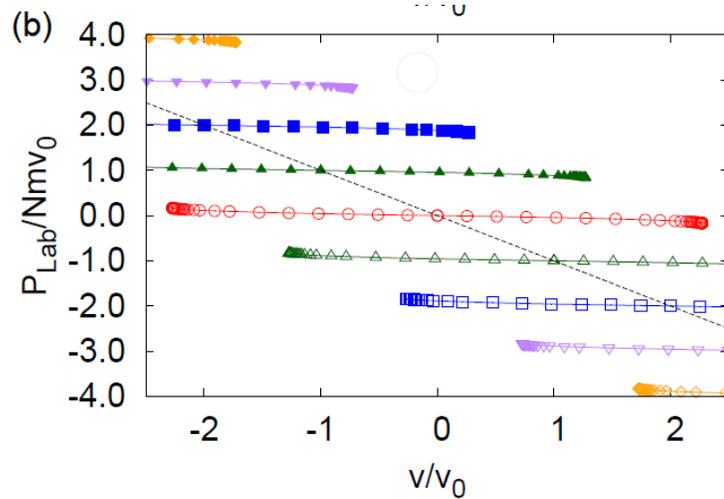
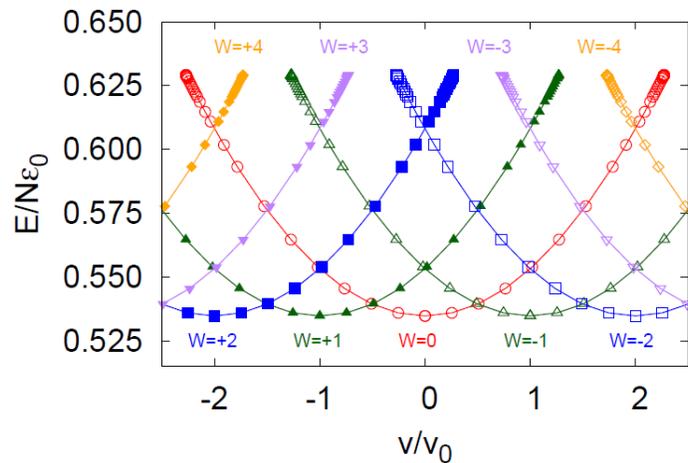
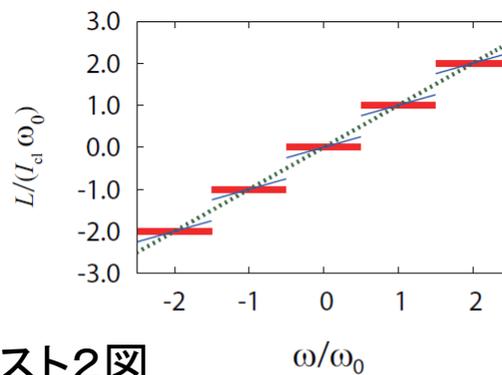


FIG. 4. (Color online) (a) Density profile, and (b) phase profile, for  $(L, U_0, d) = (48\xi, 10\epsilon_0, 2.5\xi)$  and  $v = 0.4303400v_s \simeq 0.9999907v_c$ . White and black circles represent the position of the GVP.

# 臨界速度の存在



テキスト3図



テキスト2図

角速度  $\omega$  で回転している容器中の流体の角運動量

# 臨界速度の存在、渦の生成、密度揺らぎ

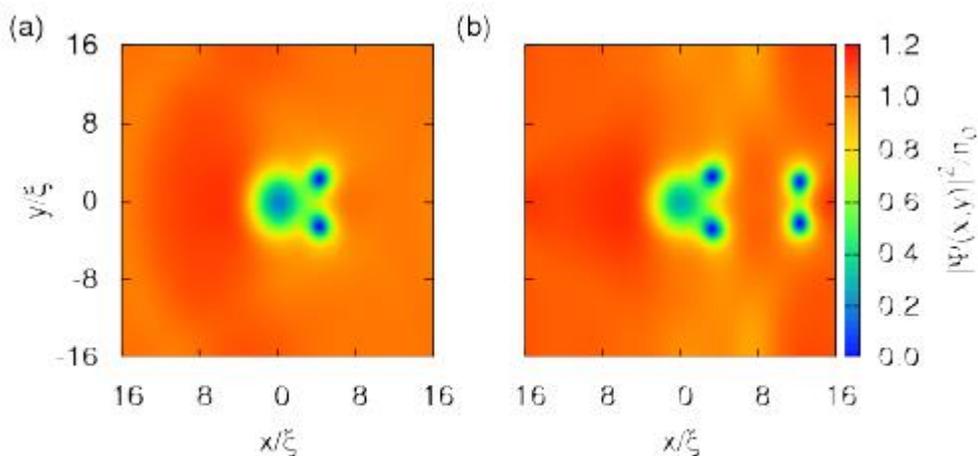


図 5.19  $L = 32\xi$ ,  $U_0 = \epsilon_0$ ,  $d = 2.5\xi$ ,  $v = 0.6v_s \simeq 1.301939v_c$  における密度の空間プロファイルのスナップショット。時刻はそれぞれ (a) $t = 20\tau$ 、(b) $t = 45\tau$  である。初期状態は  $v = 0.4v_s \simeq 0.8679591v_c$  における定常解を用いた。

## 各励起状態での密度揺らぎ

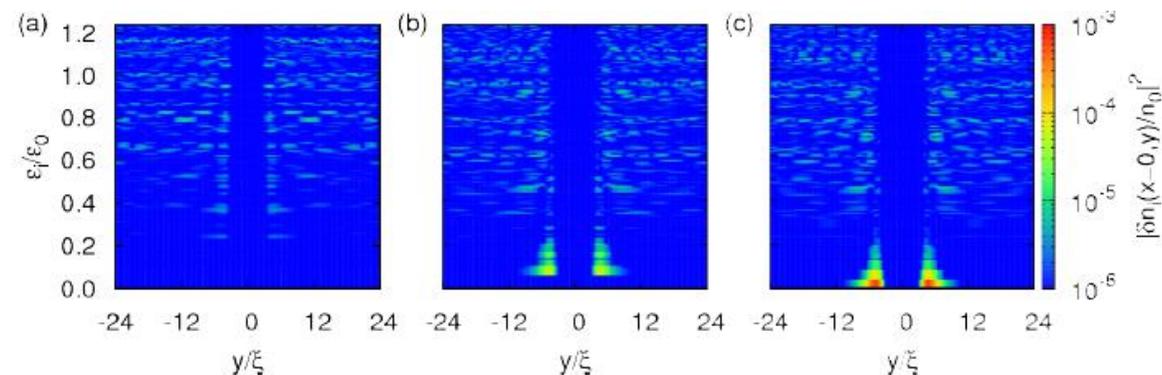
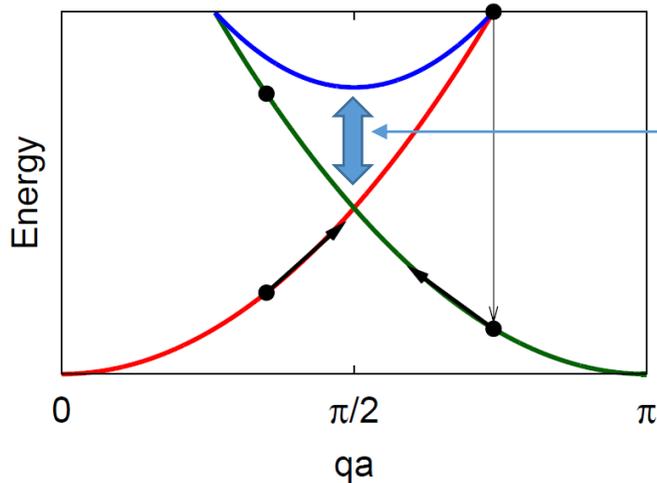


FIG. 12. (Color online) Energy and  $y$ -dependence of the density fluctuations for  $(L, U_0, d) = (48\xi, 5\epsilon_0, 2.5\xi)$ , (a) $v = 0.1v_s$ , (b) $v = 0.42v_s$ , and (c) $v = 0.42655v_s$ , at  $x = 0$ . Here, we set  $1/\sqrt{n_0\xi^2} = 0.1$ .

## 安定解と不安定解のエネルギーダイアグラム

これまで信じられてきた  
エネルギーダイアグラム (swallow-tail  
structure)



エネルギー障壁

図 5.9 Swallow tail 構造の模式図。縦軸がエネルギー、横軸が速度に対応する波数  $q$  である。  $a$  は格子定数である。赤線、緑線、青線がそれぞれ定常解のエネルギーを表す。青線の解はエネルギー極大の点 (saddle-point) を表し、動的不安定性を示す。

実際のエネルギーダイアグラム

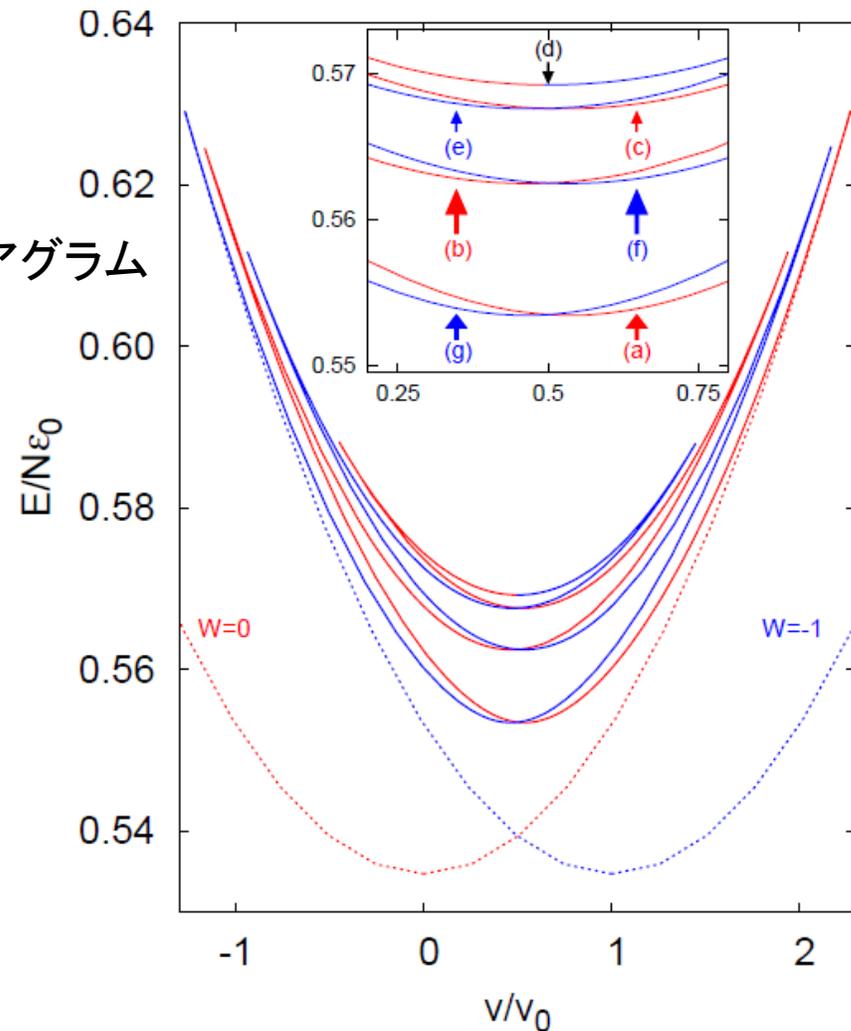


FIG. 15. (Color online) Energy diagram for  $(L, U_0, d) = (32\xi, 5\epsilon_0, 2.5\xi)$ . The red dotted (solid) line shows the stable (unstable) solution for  $W = 0$ . The blue dotted (solid) line shows the stable (unstable) solution for  $W = -1$ . The inset shows magnified view around  $v = v_0/2$ .

## 不安定解の空間構造

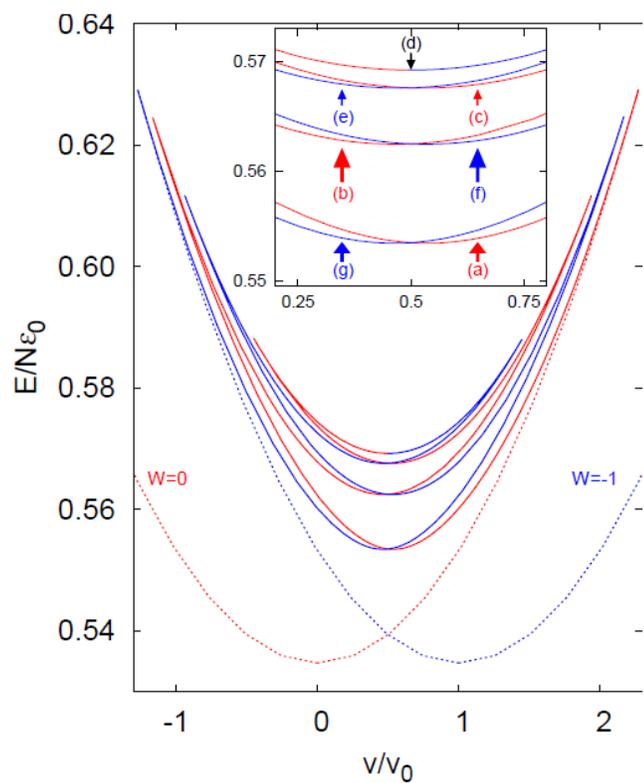


FIG. 15. (Color online) Energy diagram for  $(L, U_0, d) = (32\xi, 5\epsilon_0, 2.5\xi)$ . The red dotted (solid) line shows the stable (unstable) solution for  $W = 0$ . The blue dotted (solid) line shows the stable (unstable) solution for  $W = -1$ . The inset shows magnified view around  $v = v_0/2$ .

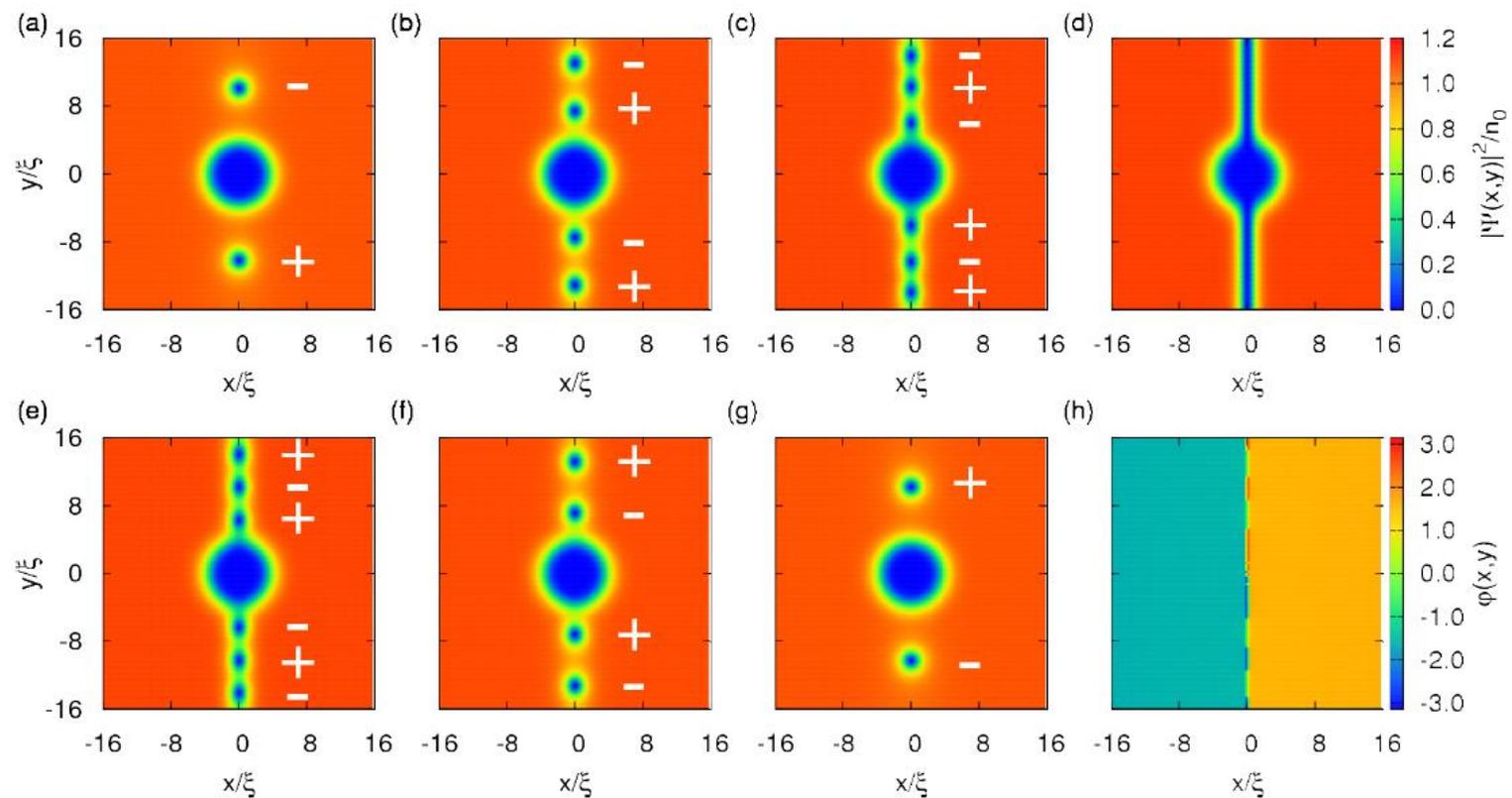


FIG. 16. (Color online) Density profiles for  $(L, U_0, d) = (32\xi, 5\epsilon_0, 2.5\xi)$  near  $v = v_0/2$ . The labels (a) to (g) correspond to the branches shown in the inset of Fig. 15. The sign written near each vortex denotes vorticity. (h): Phase profile for (d). We can see  $\pi$  phase jump at  $x = 0$  in (h).

# 自己紹介

専門: 物性理論(超伝導、超流動、量子可積分系、スピン系)

領域でいえば、1, 6, 8, 11のあたり

- 1990 東大工学部物理工学科卒業  
←1991 所属研究室(永長研)に古崎昭先生が助手として着任
- 1994 東大工学系超伝導工学専攻博士課程中退
- 1994 東北大学理学系物理学専攻 助手 ←西野先生(助手)、遠藤先生、佐藤憲昭先生が在職。
- 1995 博士(工学)
- 1996-2000 東大物理工学科 講師
- 1997-1998 ドイツ・ケルン大学 客員研究員
- 2000-現在 東大総合文化 准教授 ←吉岡先生が在職。

## 夏の学校参加歴(1990年 物性若手夏の学校(志賀高原) 修士一年生のとき後半から参加)

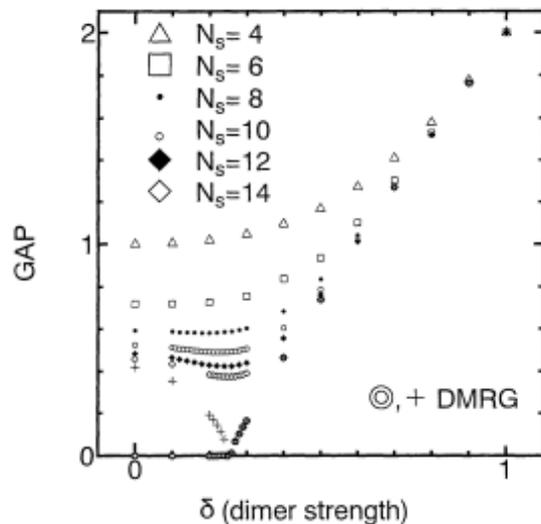
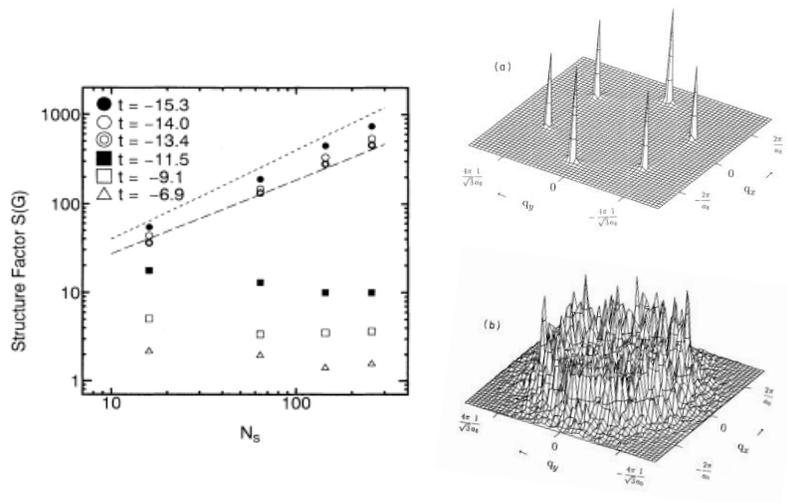
- 校長 西野友年さん(当時、阪大院生、現在神戸大)
- 近藤淳先生(特別講演;抵抗極小の理論)、遠藤康夫先生(シンポジウム)。
- 高橋實先生(特別講演;量子スピン系)。
- 吉岡大二郎先生(講義;分数量子ホール効果)、佐藤憲昭先生(ゼミ;重い電子系)
- 田崎晴明先生の講義は聞き逃した。
- 知り合った人: 松井広志さん(重い電子系)、茶碗谷さん(非線形)、荒木圭典さん(非線形?流体?)、浅野泰寛さん(メゾ?)、押川正毅さん(量子スピン系)、大久保晋さん(磁気共鳴?)

# 自己紹介(研究経歴)

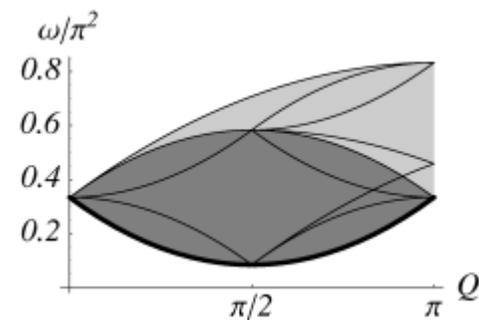
専門: 物性理論 (超伝導、超流動、量子可積分系、スピン系)

領域でいえば、1, 6, 8, 11のあたり

## 初期の研究



$$\left[ \sum_{i=1}^n \left( Z_i \frac{\partial}{\partial Z_i} - \frac{N}{2} \right)^2 - \sum_{i < j} \frac{2Z_i Z_j}{(Z_i - Z_j)^2} (1 + s_{ij}) \right] \Phi = \epsilon \Phi$$



超伝導量子渦の相転移  
(Kato-Nagaosa 1993)

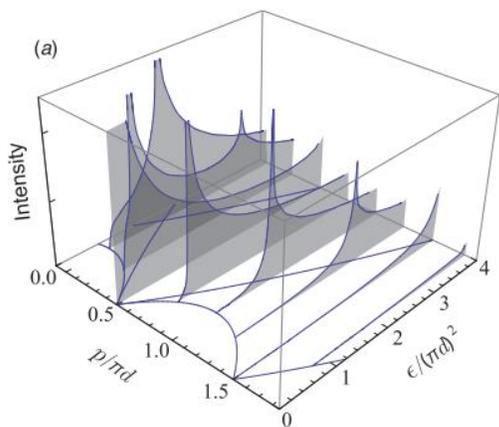
量子スピン系の相転移  
(Kato-Tanaka 1994)

可積分  $t$ - $J$  模型の相関関数  
(Kato 1998)

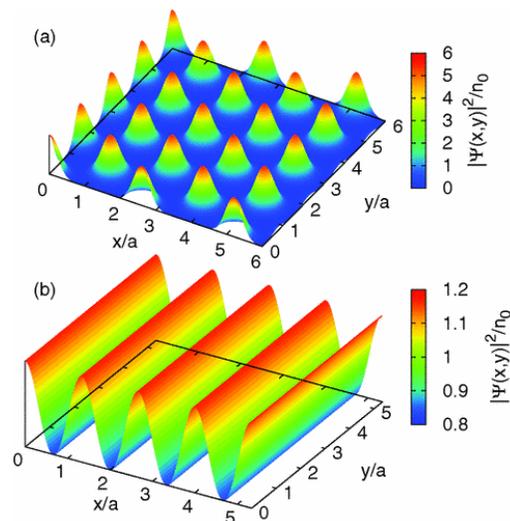
# 自己紹介(研究経歴)

専門: 物性理論(超伝導、超流動、量子可積分系、スピン系)

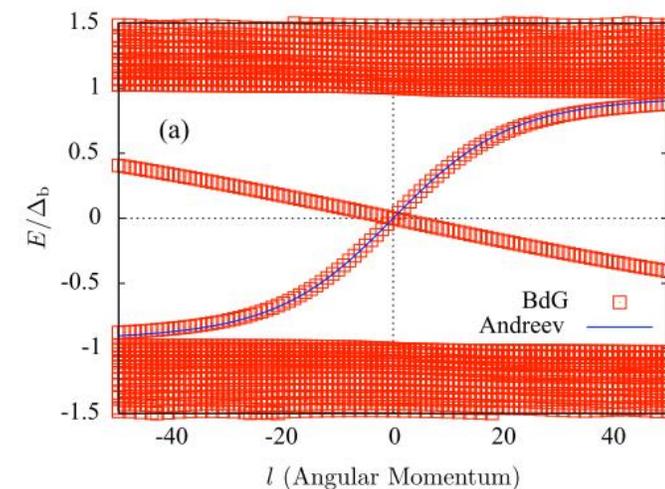
## 最近の研究



Calogero模型の動的相関関数  
(Nakai-Kato 2014)



超流動流によって誘起される超固体相  
(Kunimi-Kato 2012)



超伝導量子渦のフェルミオン励起  
(Masaki-Kato 2015)